Proceedings of the 13th Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan
August 8-10, 2016, Chiba, Japan
PASJ2016 MOP103

シンクロトロン振動とドップラー効果

SYNCHROTRON OSCILLATIONS AND DOPPLER EFFECTS

神保光一#
Kouichi. Jimbo#,
京都大学エネルギー理工学研究所
Institute of Advanced Energy, Kyoto University

Abstract

The Hamiltonian, which was composed of coasting, synchrotron and betatron motions, clarified the synchro-betatron resonant coupling mechanism in a storage ring. The equation for the synchrotron motion was also obtained from the Hamiltonian. The so-called synchrotron oscillation consists of the energy and the phase oscillations. It shows that the coasting motion and the energy oscillation are not independent since the energy oscillation occurs on the mechanical frame of coasting motion. This result might make happen an unexpected synchrotron tune change observed on the laboratory frame by the Doppler effect. We discuss about it and propose an experiment to demonstrate it.

1. はじめに

シンクロベータートロン共鳴結合付近で観察された horizontal betatron tune jump を説明するために惰行、シンクロトロン そして ベタートロン運動からなるハミルトニアンが導かれた [1]。
ここではシンクロトロン運動の中の振動は、惰行運動の力学系の上で記述されることを明らかにして、実験室系から見たいわゆるシンクロトロン振動のドップラー効果による synchrotron tune の変化について議論する。

2. 軌道粒子のハミルトニアン

標準閉軌道上(on-momentum)の質量 m の粒子が、運動量 p_0、速度 v で平均半径 R の閉軌道を周回している時、惰行運動をしている粒子の全エネルギーを E_0、そして運動エネルギーを K とすると次の関係を満たす。

$$p_0 = m\gamma\beta c\,, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \beta = \frac{v}{c} \quad \text{そして} \quad E_0 = m\gamma c^2$$

さらに $E_0{}^2 = \left(p_0 c\right)^2 + \left(mc^2\right)^2$、 $E_0 = K + mc^2$。
惰行、 シンクロトロン そして ベタートロン運動からなるハミルトニアンは 2 次の効果まで含めると、文献 1 の式(21)から次のように与えられる。

$$\overline{H} = -\left(1+\delta_C+\delta_S\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{p}_x}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{2}K_x\overline{x}^2 + \frac{1}{2}(-\eta)\left(\delta_C+\delta_S\right)^2$$
$$-\frac{hqV}{2\pi\beta^2 E_0}\left\{\cos\left(\phi+\phi_D\right) - \cos\left(\phi_S+\phi_D\right) + \left(\phi-\phi_S\right)\sin\left(\phi_S+\phi_D\right)\right\} \quad (1)$$

ここで δ_S はシンクロトロン運動による運動エネルギーの (rationalized) fractional deviation 、そして δ_C は dispersion による運動エネルギーの(rationalized) fractional deviation である。 共に δ_S と δ_C は $\beta^2 E_0$ で規格化されている。η は phase slip factor である[2]。標準閉軌道からずれた(off-momentum) 閉軌道粒子において、$\overline{x}$ は horizontal coordinate そして $\bar{p}_x$ は horizontal momentum を表す。 また $\phi_D = -\frac{D}{R}\left(\frac{\bar{p}_x}{p_0}\right) + \frac{D'}{R}\overline{x}$ 、そして $\phi_S = \psi_S - \phi_D$ であり、D は dispersion である。ここで ψ_S は rf 空洞の電圧 V と同期した粒子の位相角を表す。このハミルトニアンは、曲率を含んでいないので、軌道上の粒子を線形的に取り扱うことができる。

3. 惰行運動上のエネルギー振動

シンクロトロン運動の中のいわゆるシンクロトロン振動は、エネルギー振動と位相振動からなる。エネルギー振動の運動方程式は、文献 1 の式(25)、及び(27)から次のように与えられる。

$$\delta_S = \hat{\delta}\cos\left\{\nu_\eta\left(\theta-\theta_0\right)\right\} + \delta_0 + C \qquad (2)$$

$$\nu_\eta^2 = \frac{\omega_S^2}{\omega_0^2} = \frac{hqV\left|\eta\cos\left(\phi_S+\phi_D\right)\right|}{2\pi\beta^2 E_0} \qquad (3)$$

ここで $\delta_0 = -\delta_C - \frac{1}{\eta}$。 θ_0 は injection point における orbit angle 、 ν_η は synchrotron tune, ω_s は synchrotron frequency、 $\hat{\delta}$ は振動の振幅、そして C は積分定数である。

#jimbo@iae.kyoto-u.ac.jp

一般的に $\delta_C << 1$ が成りたち、$\theta = \theta_0$ において $\delta_C = \hat{\delta}$ と選ぶことができるので、δ_C の項を無視する。以後、粒子は標準閉軌道上を周回していると考える。式(2)から、

$$\delta_S = \hat{\delta}\cos\left\{\nu_\eta\left(\theta - \theta_0\right)\right\} + \tfrac{1}{(-\eta)} + C \qquad (4)$$

暗黙の裡に $\delta_S << 1$ かつ $\hat{\delta} \approx \left|\delta_S\right|$ が仮定される。しかし $\tfrac{1}{(-\eta)} > 1$ が満たされなければならない。

そこで文献 1 の(rationalized) fractional deviation δ の定義にならって以下のように定義する：

$$\delta_S \equiv \frac{E_S}{\beta^2 E_0}、\ \hat{\delta} \equiv \frac{\Delta\hat{E}}{\beta^2 E_0}\ \ そして\ \ \frac{E_\eta}{\beta^2 E_0} = \frac{1}{(-\eta)}。$$

ここで E_S は全運動エネルギーで $E_S \sim \beta^2 E_0$ が成り立つ。さて ΔE_S をエネルギー振動分の運動エネルギーとすると、$\Delta E_S << \beta^2 E_0$。$\Delta\hat{E}$ は、エネルギー振動の振幅である。

次に、積分定数を省略して、式(4)を以下のように書き換える。

$$\frac{E_S}{\beta^2 E_0} = \frac{\Delta\hat{E}}{\beta^2 E_0}\sin\left\{\nu_\eta\left(\theta - \theta_0\right)\right\} + \frac{E_\eta}{\beta^2 E_0}$$

または

$$E_S = \Delta\hat{E}\sin\left\{\nu_\eta\left(\theta - \theta_0\right)\right\} + E_\eta \qquad (5)$$

ここで以下のように定義する。

$$\frac{\Delta E_S}{\beta^2 E_0} = \frac{\Delta\hat{E}}{\beta^2 E_0}\sin\left\{\nu_\eta\left(\theta - \theta_0\right)\right\}$$

または

$$\Delta E_S = \Delta\hat{E}\sin\left\{\nu_\eta\left(\theta - \theta_0\right)\right\} \qquad (6)$$

従って、つぎの関係式が得られる。

$$\frac{E_S}{\beta^2 E_0} = \frac{\Delta E_S}{\beta^2 E_0} + \frac{E_\eta}{\beta^2 E_0}$$

または

$$E_S = \Delta E_S + E_\eta \qquad (7)$$

式(7) の右辺の第一項はエネルギー振動の運動エネルギーを、第二項はエネルギー振動の中心(振動中心)のエネルギーを表す。つまりエネルギー振動は、E_η を中心 (基準)とした、エネルギー ΔE_S の振動であることが分かる。そこで E_η の項を振動中心の運動エネルギーとみなすことができる。E_η の項はハミルトンの運動方程式において、式(1) における惰行運動の項により式 (4)に出現した。従って惰行運動とシンクロトロン運動は独立していない。エネルギー振動は惰行運動を表す振動中心上の力学系で行われているのである。

4. 振動中心によるドップラー効果

エネルギー振動を無視して、振動中心に位置する質量 m の架空の粒子を考える。標準閉軌道上の運動量 p_0 の粒子の力学エネルギーは K であるが、E_η は振動している粒子が居る力学系の実験室系に対する相対的運動エネルギー、すなわち E_η は架空の粒子の運動エネルギーと見なせる。

振動中心の見かけ上の速度 u_C を以下のように評価する。架空の粒子は運動量 p_i 、全エネルギー E_i で振動中心に位置すると考えると、

$$E_i = E_\eta + mc^2、\ p_i = m\gamma_C u_C、$$

かつ $E_i^2 = \left(p_i c\right)^2 + \left(mc^2\right)^2$。

ここで $\gamma_C = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_C}{c}\right)^2}}$ とすると、

$$E_i = \gamma_C mc^2\ 。$$

従って次の式が得られる。

$$\gamma_C = \frac{E_i}{mc^2} = \frac{E_\eta + mc^2}{mc^2} = \frac{\frac{1}{(-\eta)}\beta^2 E_0 + mc^2}{mc^2}$$

$$\gamma_C = 1 + \frac{\beta^2\gamma}{(-\eta)} \qquad (8)$$

そして

$$\frac{u_C}{c} = \frac{p_i c}{E_i} = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{E_i}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_C^2}} \qquad (9)$$

実験室系の synchrotron tune $\nu_\eta^\pm$ は、振動中心が居る力学系の ν_η からドップラー効果により次のように変化する[3]。

$$\nu_\eta^\pm = \nu_\eta\gamma_C\left(1 \mp \frac{u_C}{c}\right) \qquad (10)$$

式(8)、及び(9)から、以下の関係が得られる。

$$\frac{u_C}{c} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{\beta^2\gamma}{(-\eta)}\right)^2}} \qquad (11)$$

そして

$$\nu_\eta^\pm = \nu_\eta\left\{1+\frac{\beta^2\gamma}{(-\eta)}\right\}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{1}{\left(1+\frac{\beta^2\gamma}{(-\eta)}\right)^2}}\right) \qquad (12)$$

これがドップラー効果による、振動中心上の力学系で行われるエネルギー振動が、実験室系で観測される時の synchrotron tune である。

5. 考察

一般に架空の粒子の運動エネルギー E_η は、必ずしも標準閉軌道上の粒子の運動エネルギー K とは一致せず、架空の粒子は標準閉軌道上にもいない。振動中心に位置する架空の粒子の速度が、(標準)閉軌道上の粒子の速度と一致した時($\gamma=\gamma_C$), $\eta=\eta_C$ とすると、Eq.(8) から

$$\gamma=\gamma_C=1+\frac{\beta^2\gamma}{(-\eta_C)}$$

そして

$$-\eta_C=\frac{\beta^2}{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}=1+\frac{1}{\gamma} \qquad (13)$$

こで以下の関係が得られる：

1) $-\eta=0$、 振動中心が $u_C=c$ で動く。

2) $0<-\eta<1+\dfrac{1}{\gamma}$、振動中心が閉軌道上の粒子より早く動く。

3) $-\eta=-\eta_C=\dfrac{\beta^2}{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)}=1+\dfrac{1}{\gamma}$、振動中心と閉軌道上の粒子の速度が一致している。

4) $1+\dfrac{1}{\gamma}<-\eta$、振動中心が閉軌道上の粒子より遅く動く。

5) $-\eta\to\infty$、振動中心が実験室系上にある $(u_C=0)$。

式(1) において右辺第一項 −1 は惰行運動、すなわち 0 次の閉軌道上を周回する粒子を表す。 一方、右辺第 3 項の δ_S は、1 次のシンクロトロン運動を表す。言い替えると、惰行運動は、0 次の効果であるが、シンクロトロン運動は 1 次の効果である。従って振動中心の運動エネルギー E_η は、閉軌道上の粒子の運動エネルギー K の近傍にあり、エネルギー振動は惰行運動上の力学系において記述されなければならない。

つまり条件 3) が常に満たされなければならないが、実際のシンクロトロンにおいては、$(-\eta)<1$ である。従って $(-\eta)\neq 1+\dfrac{1}{\gamma}$ であり、E_η は K の近傍にはいない。

一般に 1) 、3)、4)、及び 5) を満たす η の値を得ることは難しいので、η は 2) を満たす。

これは<u>振動中心に位置する架空の粒子が、閉軌道上の粒子より早く動くことを示す</u>。しかしこれは常識的にあり得ない。

そこで Eq.(4)において、積分定数 C を敵当に選んで、E_η を改めて定義しなおす。新たに

$$\frac{E_\eta}{\beta^2 E_0}=\frac{1}{(-\eta)}+C \qquad (14)$$

よって

$$E_\eta=\left\{\frac{1}{(-\eta)}+C\right\}\beta^2E_0$$
$$=\left\{\frac{1}{(-\eta)}+C\right\}\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)(\gamma-1)mc^2$$
。

振動中心と閉軌道上の粒子の速度が一致しているならば、つまりその運動エネルギー K の近傍にいるならば、$E_\eta=K$ であるので、E_η は次の式を満たす。

$$E_\eta=(\gamma-1)mc^2 \qquad (15)$$

ここで積分定数は以下のように定められる。

$$C=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}-\frac{1}{(-\eta)} \qquad (16)$$

ここで $(-\eta)<1$ の時、$C<0$。

この条件が満たされている時、振動中心は速度 v で運動しているので、ドップラー効果による実験室系の synchrotron tune $\nu^{\pm}_{\eta\,on}$ (添え字 on は on-momentum を示す) は、次のように変化する。

$$\nu^{\pm}_{\eta\,on}=\nu_\eta\gamma(1\mp\beta) \qquad (17)$$

一方、エネルギー振動は位相振動も伴うので、ドップラー効果を受けず、その値は ν_η である可能性もある。

$$\nu_\eta \text{ は変化しない。} \qquad (18)$$

そこで実験室系で計測されるエネルギー振動が、$\nu^{\pm}_\eta$、或いは $\nu^{\pm}_{\eta\,on}$、それとも単に ν_η で表されるか確かめる実験を提案する。もし ν_η、或いは、$\nu^{\pm}_{\eta\,on}$ で表されず、式(12)で表される $\nu^{\pm}_\eta$ の値に近い場合、物理的に非常に面白い結果を得ることになる。なぜならば振動中心に位置する架空の粒子が閉軌道上の粒子より早く動いていることになるからである。

参考文献

[1] K. Jimbo, Physical Review Special Topics Accelerator and Beams 19, 010102 (2016).
[2] S.Y. Lee, Accelator Physics (World Scientific, New Jersey 2012) 2nd ed. p137.
[3] J.D. Jakson, (Classical Electrodynamics, John Willey & Sons, Inc., New York 1975) 2nd ed.p521.