

伝導冷却でのカレントリードの種々の設計方法の比較について

COMPARISON OF VARIOUS DESIGN METHODS FOR CURRENT LEADS IN CONDUCTION COOLING

清水 洋孝[#], 宗 占国

Hiroataka Shimizu[#], Zhanguo Zong

High Energy Accelerator Research Organization (KEK)

Abstract

In the case of electromagnets using superconducting wires, the disappearance of electrical resistance at extremely low temperatures below the transition temperature allows for the expectation of a large amount of current flow, and as a result, it has become possible to generate a high-strength magnetic field. However, at the same time, in order to pass current through an electromagnet placed in an extremely low temperature environment, it is necessary to connect the room temperature part to the extremely low temperature part with a conductor, which becomes a large heat path and causes the problem of heat intrusion. In the field of large accelerators such as the LHC and the QCS magnets of SuperKEKB, it is common to use the sensible heat of evaporated steam from the low-temperature side heat bath to cool the conductor part, but in the case of quadrupole electromagnets housed in the cryomodule of ILC, the magnet body is cooled only by conduction cooling, separate from the cavity that is directly immersion cooled, so the conductor part also needs to be cooled only by conduction while releasing heat with anchors. For this reason, it is important to correctly evaluate the conductive component from the room temperature side, which is a major factor in heat intrusion, and the Joule heat component generated from the conductor body when current is passed through, and to perform an appropriate thermal design of the current lead. There are various design methods, such as approximations that treat thermal conductivity and electrical conductivity as constants independent of temperature, and methods that use the integral value of heat conduction. However, by obtaining results when the heat conduction equation is analytically solved without using approximations, we will compare the results with other results and report on the extent of the impact that differences in design methods have.

1. はじめに

超伝導線材を用いた電磁石の利用では、転移温度以下の極低温での電気抵抗の消失に伴い、大きな通電量が見込める事から、結果として高強度磁場の発生が可能となった。しかし同時に、極低温環境に置かれた電磁石に通電する為には、常温部から極低温部までを導線で繋ぐ必要がある為、これが大きな熱の通り道となる事で、侵入熱の問題が生じる。LHC や SuperKEKB の QCS 電磁石の様な大型加速器での現場では、低温側熱浴からの蒸発蒸気の顕熱を利用して、導線部分を冷やす工夫が採用される事が一般的であるが、ILC の cryomodule 内に収められる 4 極電磁石などの例では、直接浸漬冷却される空洞とは別に、磁石本体が伝導冷却のみで冷やされるため、導線部分に関してもアンカーで熱を逃しながら、伝導のみでの冷却を行う必要がある。このため、熱侵入の大きな要因となる常温側からの伝導成分と、通電時に導線本体から発生するジュール熱成分とを、正しく評価して、適切なカレントリードの熱設計を行う事が重要になる。熱伝導率や電気伝導率を温度に依らない定数と見做す近似や、熱伝導積分値を用いる方法など、さまざまな設計の手法があるが、熱伝導方程式を近似を用いずに解析的に解いて評価した場合の結果を求める事で、他の結果との比較を行い、設計方法の違いがもたらす影響の大きさに関して考察する事が出来る。ここでは、熱伝導方程式の解法として、近似を用いた直感的に分かり

易い方法[1]と、近似を用いずに評価する方法[2]について、両方の結果を示し、得られる結果の違いについて検討を行う。

2. 温度に関する近似を用いる解法

最初の検討として、低温部に置かれた電磁石本体に電流を送るカレントリードに対する一般的な設定を考え、それを境界条件とした熱伝導方程式を導くところから始める。

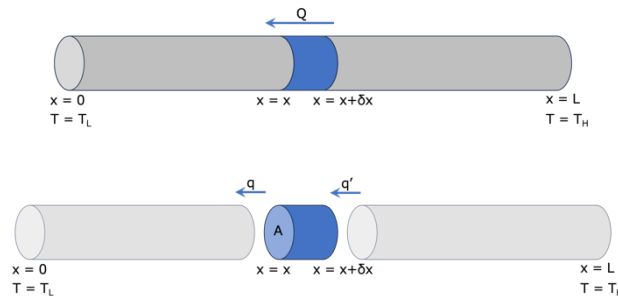


Figure 1: Current lead set-up and heat flow.

Figure 1 に示す様に、カレントリードの低温端を $x=0$ としてその温度を T_L で表し、高温端を $x=L$ としてその温度を T_H で表す。この時、高温端から低温端に向かって熱量 Q が移動するが、その内訳は、カレントリード中の x の位置に体積素片を考えた時、 $x + \delta x$ の面を通して体積素片内に流れ込む熱量 Eq. (1)と、 x の面を通して体積素片から流れ出す熱量 Eq. (2)と、体積素片内の電気抵抗

[#] hirotaka@post.kek.jp

によって発生する Joule 熱からの寄与 Eq. (3)に分ける事が出来る。ここで $k(T)$ は導線の熱伝導率を、 $\rho(T)$ は電気抵抗率を表し、 A は導線の一様な断面積として、通電する電流を I としている。

$$k(T) \times A \times \frac{dT}{dx} \Big|_{x+\delta x} \quad (1)$$

$$-k(T) \times A \times \frac{dT}{dx} \Big|_x \quad (2)$$

$$I^2 \times \frac{\rho(T) \times \delta x}{A} \quad (3)$$

今考えている体積素片に対して、熱の流出と流入が釣り合う場合を考えると、下に示す伝熱方程式が得られる。

$$\frac{d}{dx} \left(k(T) A \frac{dT}{dx} \right) + \frac{\rho I^2}{A} = 0 \quad (4)$$

考えている系では、温度は位置の関数になっており、カレントリードの場所毎に値が変わる。基本的に金属の熱伝導率や電気抵抗率は温度に依存する為、今の場合、カレントリードの位置毎にそれぞれの物性値が変化すること、これを微分方程式として解く必要があるが、複雑な温度依存性が、方程式を解く事を難しくしている。近似として、①電気抵抗率が温度に比例 ②熱伝導率は、温度には依らない として方程式を解く事を考える[1]。この仮定の下では、熱伝導方程式とその解は、

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2 \alpha}{A^2 k} T = 0 \quad (5)$$

と表される。但し電気抵抗率 ρ は αT で表されるとした。カレントリードの温度分布は解析的に解く事が出来て、以下の式で表される。

$$T = \frac{T_H \sin \left[\frac{I}{A} \sqrt{\frac{\alpha}{k}} (L - x) \right] + T_L \sin \left(\frac{I}{A} \sqrt{\frac{\alpha}{k}} x \right)}{\sin \frac{I}{A} \sqrt{\frac{\alpha}{k}} L} \quad (6)$$

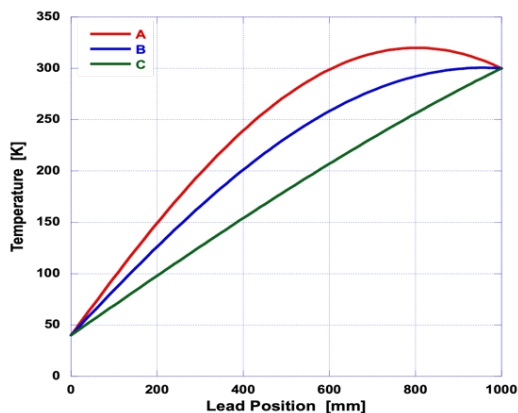


Figure 2: Temperature distributions with various combinations of I , A , α and k .

温度分布は分子の三角関数で特徴付けられ、いくつかの分布を描いたものを Fig. 2 に示す。ここでは熱伝導率や電気抵抗率、導線の断面積などの組み合わせを変えて、3通りの分布を示した。それぞれの特徴を見ていくと、 A では導線の範囲内で、高温端(300 K)よりも高い温度の部分が存在しており、Joule 発熱によって加熱されている事を示している。これは今想定している導線の長さ L に対して、その断面が細過ぎる、若しくは通電量 I が大き過ぎる事を示している。対して C の場合は、高温端での導線の温度が境界条件が示す環境温度より低く、この温度差を埋める為に、低温端に向かって、より多くの侵入熱が流れ込む配置を示している。Equation (6)の分子にある三角関数が高温端で丁度その最大値を取る時が B に相当しており、この時高温端と導線の端の温度には差が無く、温度的に釣り合っている事を示す。つまり熱的な平衡状態にあり、高温端からの熱の流入が無い事を示している。

より詳しく低温端への入熱量を検討する。全体の温度分布が Eq. (6)で示されているので、Fourier の式を用いる事で侵入熱を求めると、

$$Q = -kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = I\sqrt{\alpha k} \frac{T_H - T_L \cos \left(\frac{I}{A} \sqrt{\frac{\alpha}{k}} L \right)}{\sin \frac{I}{A} \sqrt{\frac{\alpha}{k}} L} \quad (7)$$

と求める事が出来る。実際の設計で興味があるのは、この低温端が受ける熱量が最小になる場合であるので、上で求めた熱量 Q が極値を持つと仮定して、その微分量が 0 になる場合が入熱の極小値に対応すると考える。 Q をどの物理量の関数と考えるかに関しては、いろいろな扱い方があると思われるが、例えば導線の長さ L とその断面積 A の比である L/A を変数として微分すると、

$$\frac{IL}{A} = \sqrt{\frac{k}{\alpha}} \cos^{-1} \frac{T_L}{T_H} \quad (8)$$

という関係が得られる。この関係式を用いて、再度低温端に流入する熱量を表す Eq. (7)に代入すると、

$$Q/I = \sqrt{\alpha k} (T_H - T_L) \quad (9)$$

という関係が得られる。低温端に流入する熱量は、高温端と低温端の温度差によって決まり、その比例係数には、熱伝導率と電気抵抗率を特徴付ける定数が表れている。この評価の方法は物理的な描像を数式で分かり易く表現しており、数式の取り扱いも直感的に理解し易いことから、系の設計に用いるには簡便な方法であるが、実際に導線の熱設計を行う場合には、いろいろな制約が生じる。最終的な低温端の受ける熱量を表す Eq. (9)を改めて見ると、低温端と高温端の温度は問題の設定から値が決まるが、その時の α や定数と仮定した k の値として、何を用いるべきかが不明である。高温端と低温端の温度差が小さい場合は、平均化した熱伝導率や、直線近似した電気抵抗率の値を作り出す事が出来る場合もあるが、一般の

温度設定の系には適用が難しい。この問題を回避する為に、次に述べる近似を含まない解法を用いる必要がある事が分かるが、式変形の手続きが複雑になる事から、これから行う事ははっきりさせる為には、一度近似を用いた方法で手続きの流れを確認しておく事が望ましい様に思われる。

3. 変数変換を用いて近似を回避する解法

上記の解法を使えば、温度分布が手軽に求められる利点があるが、主要な性質を司る物性値に大胆な近似を施している点に難がある。ここからは伝導冷却方式のカレントリードに対して、近似を用いないで最適化の検討を行う方法について説明を行う。

$$k(T) \times \rho(T) = L_0 \times T \quad (10)$$

最初の解法で問題になったのは、熱伝導率と電気伝導率が互いに複雑な温度依存性を持っていて、その両方が方程式中に入っていた事が原因であった。しかし熱と電荷の担い手がどちらも電子である事を踏まえると、これらの物性値には関係がある事が予想される。実際 Eq. (10) で表される Wiedemann-Franz 則と呼ばれる関係により、両者の積は、Lorentz 数を定数として温度に比例する形に纏められる。この関係を用いる事で、物性値の持つ複雑な温度依存性を簡略化する事が出来る。

もう一つの工夫は、新しい変数 z の導入である。Equation (7) で示される Fourier の式を用いて、新しい変数 z を下の様に定義する。

$$\frac{d}{dz} = \frac{I dx}{k(T)A} \quad (11)$$

これらの新しい関係式を用いると、解くべき伝熱方程式は、

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + L_0 T = 0 \quad (12)$$

と変形される。この微分方程式も解析的に解く事が出来て、求めたい温度分布は、

$$T(z) = T_L \cos(z\sqrt{L_0}) + \frac{T_H - T_L \cos(Z_2\sqrt{L_0})}{\sin(Z_2\sqrt{L_0})} \sin(z\sqrt{L_0}) \quad (13)$$

と求める事が出来る。ここで境界条件として、低温端の z を $Z_1=0$ として、高温端の z を Z_2 としてある。 z 空間での温度分布が分かったので、低温端に流入する熱量を評価してみる。

$$\begin{aligned} q_c &= \frac{k(T)A}{I} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} \\ &= \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} \\ &= \sqrt{L_0} \frac{T_H - T_L \cos(Z_2\sqrt{L_0})}{\sin(Z_2\sqrt{L_0})} \end{aligned} \quad (14)$$

この結果から、低温端に流入する熱量は、高温端を表す z 空間の座標 Z_2 の関数として表せる事が分かる。ここでも、興味があるのは、流入する熱量が最小になる場合で

あるので、Eq. (14) が Z_2 の変化に対して、極値を持つと仮定してその時に満たすべき条件を求める。 Z_2 の変化に対する微分が 0 となる条件から、

$$\frac{d}{dZ_2} q_c = L_0 \frac{T_1 - T_2 \cos(Z_2\sqrt{L_0})}{\sin(Z_2\sqrt{L_0})} = 0 \quad (15)$$

この関係式を整理する事で、流入にする熱量を最小にする高温端の条件 $Z_{2,opt}$ が、下の様に求まる。

$$Z_{2,opt} = \frac{1}{\sqrt{L_0}} \cos^{-1} \frac{T_L}{T_H} \quad (16)$$

また、その時の実際の低温端への熱の流入量を計算すると、

$$q_{c,opt} = \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = \sqrt{L_0(T_H^2 - T_L^2)} \quad (17)$$

と言う表式が得られる。この関係式から、低温端に流入する熱量(を電流で除した値)は、高温端と低温端の温度差だけで決まり、他の量には依存しない事が分かる。先に求めた Eq. (9) では、導入した近似により、特定が困難となる定数が表式中に現れるが、Eq. (17) では、全ての定数が決定可能であり、侵入熱の値が特定出来る事が分かる。

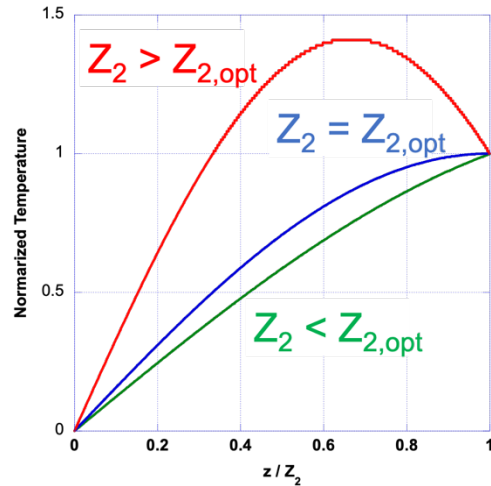


Figure 3: Temperature distribution in z space.

Figure 3 に z 空間中での温度分布の様子を載せる。これは先に計算を行った Fig. 2 の z 空間での表示に相当する。ここでも Z_2 の値が最適値より大きい場合には、導線の途中で高温端より温度が高い部分が出ており、逆に最適値より小さい Z_2 をとる場合は、導線の高温端が環境温度よりも低くなる事で、余計な熱の流入が増える事を示唆している。

z 空間での計算結果を考える事により、高温端に対応する $Z_{2,opt}$ の値が存在する事がまず理解出来る。 Z 空間での評価に限れば、この $Z_{2,opt}$ の値が分かれば、概ね知りたい量が特定出来た事になるが、本当に興味があるのは、 x 空間での表現である。Equation (11) によって関係付けられている変換を通して、 z 空間での表現を x 空間での値に戻す事を考える。この時必要になるのは、熱伝導率 k の z 空間での表現となる。一般に知られている熱伝導率は、温度の関数として、 $k(T)$ で表される。既に温

度に関しては、 z 空間内の分布として、Eq. (13) を得ているので、 T は z の関数として表す事が出来るので、熱伝導率 k も z の関数として表す事が出来る。

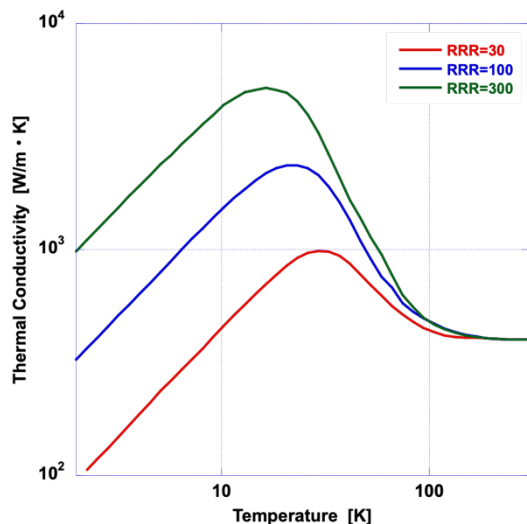


Figure 4: Thermal conductivity as a function of temperature.

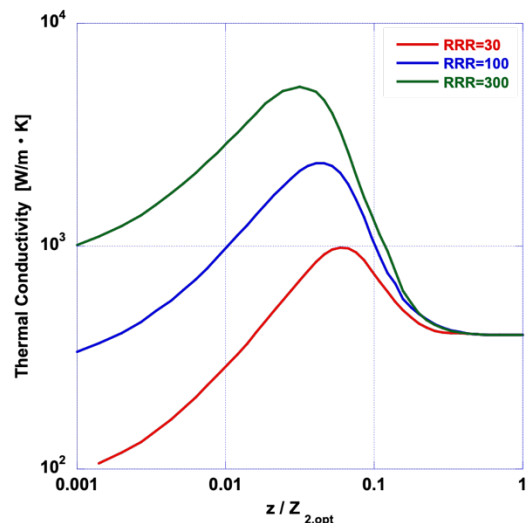


Figure 5: Thermal conductivity as a function of z .

実際に RRR の異なる 3 種類の銅の熱伝導率を Fig. 4 に示す。この表示では、横軸は温度になっている。Equation (13) で求めた温度分布に従って、熱伝導率を z 表現で表した結果を Fig. 5 に載せる。これらの値を用いる事で、次の様な関係式が成り立つ事が分かる。

$$\begin{aligned} \frac{I_{opt} \times L_{opt}}{A_{opt}} &= \frac{I_{opt}}{A_{opt}} \int_0^{L_{opt}} dx \\ &= \int_{z_1=0}^{z_2=z_{2,opt}} k(T) dz \end{aligned} \quad (18)$$

上で説明した熱伝導率の書き換えを用いると、熱伝導率を被積分関数とした z 積分が計算出来る。Figure 5 を用いれば、この積分は、導線として利用したい RRR を決め

た時に、熱伝導率の値を示す線と横軸の間の面積に相当する事が分かる。この積分値が、eq. (11) の関係式を通して、 x 空間における導線の長さの積分に対応している事が分かる。この x に関する積分を終えると、 x 空間での表示としては、最適な通電量、最適な導線長さの積を、導線の最適な断面積で除した値に等しくなっている事が分かる。所謂 shape factor と呼ばれる因子が求めた事になり[3]、これが x 空間での実際のカレントリードの熱設計の出発点となる値に対応する。実際に計算を振り返ってみても、熱伝導方程式から出発して、 z 空間での表現を経て、再び x 空間に戻ってくるまで、一度も具体的な幾何学的な形状等に言及する必要が無かった。Shape facto の取るべき値が決まる事で、漸く導線の形状についての議論が始められる。仮定する導線の RRR の値が異なると、その曲線と横軸が囲む面積も変わるので、shape factor として取るべき値も変化するので、改めて積分を行う必要がある。

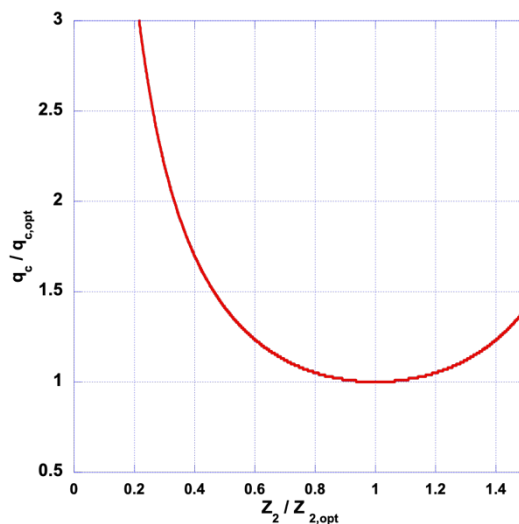


Figure 6: Evaluation of an intrusive heat to the cold end.

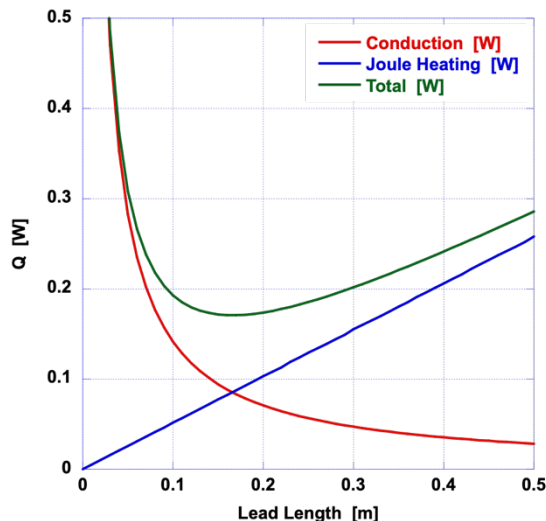


Figure 7: Simple scheme example to evaluate the total intrusive heat.

Figure 6 に、低温端への入熱量の変化の様子を示した。 Z_2 の値を正しく最適化する事で、入熱量 q_c が最小になる事を示しているが、 Z_2 の値を大きくし過ぎる事で、入熱量が再び増加する事も示している。この理由を示す一例として、非常に簡易的な熱設計の方法による計算結果を示す。Figure 7 は、RRR が 30 の無酸素銅を線材として用いた、80 K から 4 K までの温度区間の導線が示す入熱(発熱)量と、長さの最適値を示した図になっている。所謂、熱伝導積分値を用いる簡易的な計算方法の例である。線材が短過ぎる場合は、伝導による熱の伝播が主要な入熱の原因となっており、線材がある程度の長さ以上になると、通電電流による Joule 発熱分が大きな寄与を与える事になる為、中間地点に発熱の最小値が現れ、最適な線材の長さが示されている様子が見て取れる。Shape factor 中の線材長さを変化させた場合に相当しており、Fig. 6 の入熱量が $Z_{2,opt}$ を越えて Z_2 を大きくした場合に、 q_c が増加に転じている理由を表す例になっている。

4. まとめ

伝導冷却方式で超伝導磁石本体と導線を冷やす必要がある場合の、熱設計の方法について検討を行った。

よく知られている、蒸発ヘリウムの顕熱を利用した線材の冷却の方法[3]を用いた場合、熱伝達係数を 0 に取る事によって、熱伝導方程式の形状が等しくなり、今回検討を行った微分方程式及びその一般解が得られる。得られた表式は、 z 空間での表現になっており、取り扱い難いが、順を追って x 空間表示に戻す手続きを詳しく説明する事で、近似を含まず、解析的な手続きだけを用いて、熱設計が行える事を示した。Shape factor の値が決まった後に、線材の幾何学的な形状や電磁石の実際の配置、各温度定点への anchor の取り方などの個別の検討が始まるが、ここで示した手続きまでは、熱設計において、普遍的な手順である点が重要である。

参考文献

- [1] 超伝導電磁機器専門委員会、超伝導マグネット専門委員会編集、“超伝導ハンドブック”，電気学会 オーム社書店。
- [2] Zhanguo Zong and Hirotaka Shimizu, “Theoretical analysis of conduction-cooled current lead for superconducting magnet”, Supercond. Sci. Technol. 36 (2023) 105015.
- [3] Martin N. Wilson, “Superconducting Magnets”, Oxford Science Publications.