

LONGITUDINAL AND TRANSVERSE RESISTIVE-WALL WAKEFIELDS AND THEIR EFFECTS ON ERLS

Norio Nakamura^{1,A)}

^{A)} Institute for Solid State Physics(ISSP), University of Tokyo
5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba 277-0884

Abstract

Exact longitudinal and transverse resistive-wall impedances for a round pipe with a finite thickness were analytically derived to accurately evaluate effects of resistive-wall wakefields on energy recovery linacs(ERLs). Parasitic loss in a vacuum chamber due to the longitudinal impedance was evaluated and found to be serious compared with 3rd generation SR sources because of the shorter bunch length. It was also shown by the calculation result of resistive-wall impedance of a 2-layer round pipe that copper coating is effective for reducing the parasitic loss of a stainless steel(SS) chamber. Transverse wake functions of different pipes were numerically calculated from the exact resistive-wall impedances to simulate the multi-bunch beam motion due to cumulative resistive-wall wakefields in ERLs. Possibility of resistive-wall beam breakup in the compact ERL and long undulators in ERLs was discussed based on simulation results.

縦及び横方向の抵抗壁ウェーク場とERLへの影響

1. はじめに

エネルギー回収型ライナック(ERL)による次世代放射光源では、線形加速器としてはこれまでにない100mA級の大電流と既存光源よりも格段に短いバンチを持った電子ビームが周回することになる。このようなビームと加速器内の真空チェンバーなどの抵抗壁との相互作用によって生じるウェーク場は、ビームや加速器自身に大きな影響を及ぼす可能性がある。ここでは、これまであまり研究されてこなかった縦及び横方向の抵抗壁ウェーク場のERLへの影響を正確に評価するために、それぞれの厳密なインピーダンスを求めた。それをもとにして、縦方向では真空チェンバーの発熱の原因となる寄生損失(parasitic loss)、横方向では多バンチビームのBBU(beam breakup)について評価した結果を報告する。

2. 抵抗壁インピーダンスの厳密解

2.1 縦方向インピーダンス

まずは、有限の厚みを持つ円形パイプの縦方向の抵抗壁インピーダンス $Z_{||}$ の厳密解を解析的に求めた結果を示す。

$$Z_{||}(\omega) = \frac{-i}{2\pi\epsilon_0 bc \left\{ \left(\frac{\omega}{\lambda c} + \frac{\lambda c}{\omega} \right) \alpha_l - \frac{b\omega}{2c} \right\}} \quad (1)$$

$$\alpha_l = \frac{J_1(\lambda b)N_0(\lambda(b+d)) - N_1(\lambda b)J_0(\lambda(b+d))}{J_0(\lambda b)N_0(\lambda(b+d)) - N_0(\lambda b)J_0(\lambda(b+d))}$$

$$\lambda = \frac{i + \text{sgn}(\omega)}{\delta} \quad \left(\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0|\omega|}} \right)$$

ここで、 b , d , σ , ϵ_0 , μ_0 , c , ω , δ , i は、それぞれパイプ半径(内径)、パイプ厚、パイプ材の電気伝導度、真空の誘電率と透磁率、光速、角周波数、表皮厚(skin depth)、虚数単位で、 J_0 , J_1 , N_0 , N_1 は0次と1次の第1種、第2種のベッセル関数である。パイプ材の誘電率と透磁率は、真空の誘電率と透磁率に等しいとした。さらに、パイプ厚 d が無限に大きい極限($d \rightarrow \infty$)では、インピーダンスは式(2)のように、0次と1次の第1種ハンケル関数 $H_0^{(1)}$, $H_1^{(1)}$ で表すことができる。

$$Z_{||}(\omega) = \frac{i}{2\pi\epsilon_0 bc \left\{ \frac{b\omega}{2c} - \left(\frac{\omega}{\lambda c} + \frac{\lambda c}{\omega} \right) \frac{H_1^{(1)}(\lambda b)}{H_0^{(1)}(\lambda b)} \right\}} \quad (2)$$

なお、 $|\lambda b| \gg 1$, $|\lambda c/b| \gg |\omega b/c|$, $|\lambda c/\omega| \gg |\omega/\lambda c|$ という条件を満足する時のみ、式(3)の古典的な表現(conventional expression)で近似できる。

$$Z_{||}(\omega) = \frac{\omega Z_0 \delta}{4\pi bc} \{ \text{sgn}(\omega) - i \} \quad \left(Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \right) \quad (3)$$

図1に式(1)(2)から求めた半径8mmのステンレススチール(SS)製パイプの縦方向抵抗壁インピーダンス(パイプ厚 $d=1\text{mm}$, 10mm , 100mm , ∞)を示す。比較のために、式(3)の古典的な表現も図示した。ステンレススチールの電気伝導度は $\sigma=1.4 \times 10^6 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ としている。厳密なインピーダンスでは、2種類のカットオフ周波数(cut-off)があり、高周波カットオフは

¹ E-mail: nakamura@issp.u-tokyo.ac.jp

半径にのみ依存し、低周波カットオフは半径と厚みの両方に依存することがわかる。

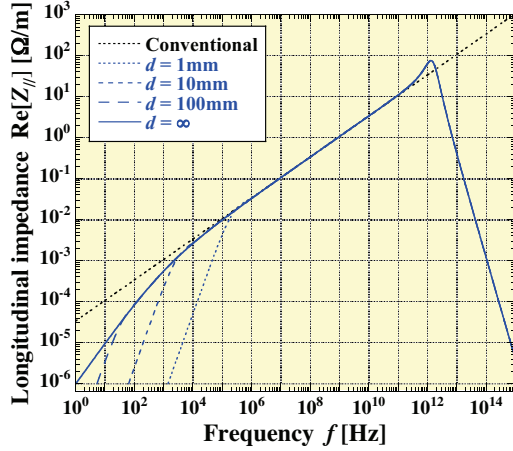


図1：ステンレス製円形パイプ(半径8mm)の縦方向抵抗壁インピーダンスの実部(パイプ厚 $d=1\text{mm}$, 10mm , 100mm , ∞)。黒の点線は古典的な表現(conventional expression)を示す。

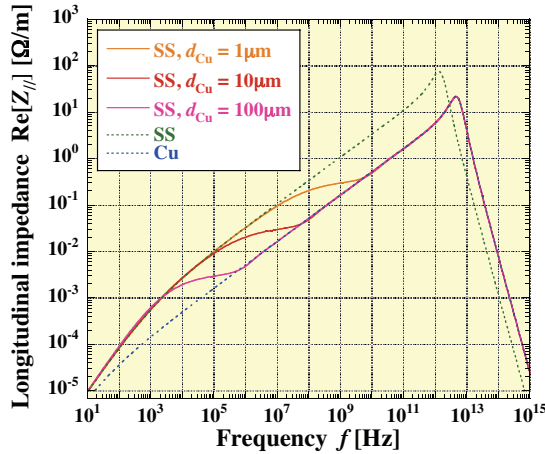


図2：内半径8mmで内層の厚みが $1\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$, $100\mu\text{m}$ の二層円形パイプ(内層:Cu、外層:SS)の縦方向抵抗壁インピーダンスの実部。緑と青の点線は、純粋なステンレスと銅のパイプを示す。

次に内層外層の2層から成る円形パイプの縦方向の抵抗壁インピーダンスの厳密解を解析的に求めた結果を以下に示す。

$$Z_{||}(\omega) = \frac{-i}{2\pi\epsilon_0 bc \left\{ \left(\frac{\omega}{\lambda_1 c} + \frac{\lambda_1 c}{\omega} \right) \alpha_{12} - \frac{b\omega}{2c} \right\}} \quad (4)$$

$$\alpha_{12} = \frac{J_1(\lambda_1 b) + \kappa N_1(\lambda_1 b)}{J_0(\lambda_1 b) + \kappa N_0(\lambda_1 b)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{i + \text{sgn}(\omega)}{\delta_{1,2}}, \quad \delta_{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_{1,2} \mu_0 |\omega|}}$$

$$\kappa = \frac{\left(\frac{\omega}{\lambda_1 c} + \frac{\lambda_1 c}{\omega} \right) H_0^{(1)}(\lambda_2(b+d)) N_1(\lambda_1(b+d)) - \left(\frac{\omega}{\lambda_2 c} + \frac{\lambda_2 c}{\omega} \right) H_1^{(1)}(\lambda_2(b+d)) N_0(\lambda_1(b+d))}{\left(\frac{\omega}{\lambda_2 c} + \frac{\lambda_2 c}{\omega} \right) H_1^{(1)}(\lambda_2(b+d)) N_0(\lambda_1(b+d)) - \left(\frac{\omega}{\lambda_1 c} + \frac{\lambda_1 c}{\omega} \right) H_0^{(1)}(\lambda_2(b+d)) N_1(\lambda_1(b+d))}$$

ここで、 b , d , $\sigma_{1,2}$, $\delta_{1,2}$ は、それぞれパイプ半径(内径)、内層のパイプ厚、内層外層の電気伝導度と表皮厚(skin depth)である。また、外層の厚みは無限に大きいとしている。図2に式(4)から求めた半径8mmの二層パイプ(内層:Cu、外層:SS)の縦方向抵抗壁インピーダンス($d=1\mu\text{m}$, $10\mu\text{m}$, $100\mu\text{m}$)を示す。比較のために、式(2)から求めた同じ内径を持つ純粋なCuとSSのパイプのインピーダンスも示した。銅の電気伝導は $\sigma=5.8 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ とした。二層パイプのインピーダンスは、低周波数では純粋なSSパイプと一致するが、周波数が上がるとずれて、高周波領域では純粋な銅パイプのインピーダンスと一致することがわかる。ずれる周波数は、メッキ厚に依存している。

2.2 横方向インピーダンス

縦方向と同様に、有限の厚みを持つ円形パイプの横方向の抵抗壁インピーダンス Z_{\perp} の厳密解を解析的に求めた結果を示す^[1]。

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{-i}{\pi\epsilon_0 b^3 \omega \left\{ \left(\frac{2\omega}{\lambda c} + \frac{\lambda c}{\omega} \right) \alpha_t - \frac{b\omega}{2c} \right\}} \quad (5)$$

$$\alpha_t = \frac{J_2(\lambda b) N_1(\lambda(b+d)) - N_2(\lambda b) J_1(\lambda(b+d))}{J_1(\lambda b) N_1(\lambda(b+d)) - N_1(\lambda b) J_1(\lambda(b+d))}$$

ここで、 b , d , σ , ϵ_0 , μ_0 , c , ω , δ , i は、式(1)と同じ定義で、 J_1 , J_2 , N_1 , N_2 は1次と2次の第1種、第2種のベッセル関数である。さらに、パイプ厚 d が無限に大きい極限($d \rightarrow \infty$)では、式(6)のように1次と2次の第1種ハンケル関数 $H_1^{(1)}$, $H_2^{(1)}$ で表すことができる。

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{-i}{\pi\epsilon_0 b^3 \omega \left\{ \left(\frac{2\omega}{\lambda c} + \frac{\lambda c}{\omega} \right) \frac{H_2^{(1)}(\lambda b)}{H_1^{(1)}(\lambda b)} - \frac{b\omega}{2c} \right\}} \quad (6)$$

縦方向と同様、 $|\lambda b| \gg 1$, $|\lambda c/b| \gg |ob/c|$, $|\lambda c/\omega| \gg |\omega/\lambda c|$ という条件を満足する時のみ、式(7)の古典的表現が良い近似となる。

$$Z_{\perp}(\omega) = \frac{Z_0 \delta}{2\pi b^3} \{ \text{sgn}(\omega) - i \} \quad (7)$$

図3に式(5)(6)から求めた半径25mmと3mmのステンレススチール(SS)製パイプの縦方向抵抗壁インピーダンス(パイプ厚 $d=1\text{mm}$, 10mm , 100mm , ∞)を示す。厳密なインピーダンスでは、縦方向と同様に、半径にのみ依存する高周波カットオフと半径と厚みの両方に依存する低周波カットオフがある。注目すべきことは、厳密なインピーダンスは古典的表現とは異なり、周波数が下がると増加し続けることなく

途中から減少に転じて、最終的にはゼロに向かうことである。

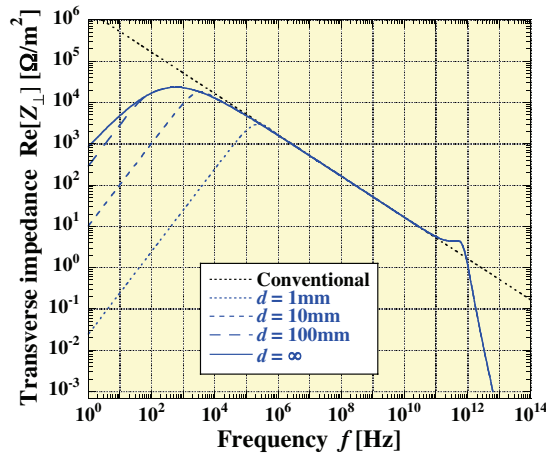


図3：半径25mmの円形パイプの横方向抵抗壁インピーダンス（パイプ厚 $d=1\text{mm}$, 10mm , 100mm , ∞ ）。黒の点線は古典的な表現を示す。

3. 縦方向ウェーク場による寄生損失

3.1 ロスファクターと寄生損失

ロスファクター(loss factor) k とインピーダンスの関係を表式(8)に示す。

$$k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}\{Z_{//}(\omega)\} \exp\{-(\sigma_t \omega)^2\} d\omega \quad (8)$$

ここで、バンチの縦方向の電子分布をガウス分布と仮定し、その標準偏差を σ_t としている。バンチ長が短くなると、 σ_t を含む指数項による高周波のカットオフが高周波側にシフトする結果、ロスファクターが大きくなる。ERLでは第3世代放射光源に比べて一桁から二桁短いバンチ長を有するために、ロスファクターが格段に大きくなる。

長さ L の真空チェンバー（円形パイプ）での寄生損失 P_{RW} はロスファクターを使って次のように書ける。

$$P_{RW} = k Q_b^2 f_b L = k I^2 L / f_b \quad (9)$$

ここで、 Q_b , f_b , I は、バンチ電荷、バンチ繰り返し周波数、平均ビーム電流である。

典型的なERL光源 ($I=100\text{mA}$, $f_b=1.3\text{GHz}$) でのロスファクターと単位長さ当りの寄生損失は、半径8mmと3mmのパイプに対して式(8)(9)を用いて計算すると、

$$k = 2.73(7.11) [\text{V/pC/m}] \quad (b = 8(3)\text{mm})$$

$$P_{RW} / L = 21.0(54.7) [\text{W/m}] \quad (b = 8(3)\text{mm})$$

となる。一方、SPring-8 ($I=100\text{mA}$, $f_b=0.045\text{GHz}$) では、

$$k = 0.0562(0.150) [\text{V/pC/m}] \quad (b = 8(3)\text{mm})$$

$$P_{RW} / L = 13.3(35.3) [\text{W/m}] \quad (b = 8(3)\text{mm})$$

となる。大きなロスファクターのためにERL光源の方が寄生損失（発熱）がより大きいことがわかる。

3.2 銅メッキによる寄生損失の低減

寄生損失のために冷却システムを真空チェンバー等に配備させることは極力抑えたい。寄生損失自身を下げるためには、特に口径の小さい真空チェンバーに銅やアルミなどの電気伝導度の良い材質を使うことであるが、その反面で電磁石や挿入光源の磁場の変化時にチェンバーによる渦電流が発生しやすくなる。それを抑える方法として、チェンバー内面に電気伝導性が高い金属のメッキを施すことが挙げられる。図2で示したように、 $1\mu\text{m}$ 程度のメッキ厚でも縦方向インピーダンスで支配的な高周波成分を十分に抑えることが可能である。式(8)から求めた銅メッキステンレスチェンバーのロスファクターと寄生損失は、

$$k = 0.404(1.07) [\text{V/pC/m}] \quad (b = 8(3)\text{mm})$$

$$P_{RW} / L = 3.11(8.26) [\text{W/m}] \quad (b = 8(3)\text{mm})$$

となり、どちらも約1/7に低減できる。これは、純粋な銅チェンバーの寄生損失と同じ値であり、銅メッキの有効性がこの計算からも確認できる。銅メッキステンレスチェンバーについては超高真空で使用可能であることが報告されている^[2]。

4. 横方向ウェーク場によるBBU

4.1 ウェーク関数

式(5)のインピーダンスからウェーク関数を求める。横方向のインピーダンスとウェーク関数の関係は次のように表せる。

$$\begin{aligned} W_{\perp}(t) &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\perp}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\{Z_{\perp}(\omega)\} \sin(\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (10)$$

式(7)の古典的な表現を使うと、式(10)から抵抗壁ウェーク場の古典的表現である式(11)を得る。

$$W_{\perp}(t) = -\frac{1}{\pi b^3 t^{1/2}} \sqrt{\frac{c Z_0}{\pi \sigma}} \quad (11)$$

$$2\pi \sqrt{b^2 / \sigma Z_0} / c \ll t \ll 2\pi \mu_0 \sigma b^2, t \ll 2\pi \mu_0 \sigma d^2 \quad (12)$$

ただし、(12)の条件が満たされる時のみ成り立つので、広い時間範囲を考える場合には、厳密な表現を使う必要がある。式(5)(10)を使って半径の異なる3つのステンレス製円形パイプのウェーク関数を計算した結果を図4に示す。いずれの場合も、厳密に計算されたウェーク関数は、古典的な表現と比べて時間が経つと相対的に大きく減衰することが、図中の両者の比を見るとわかる。これは、前章で述べたように、横方向の抵抗壁インピーダンスが低周波領域で減少してゼロに近づくことと関係している。

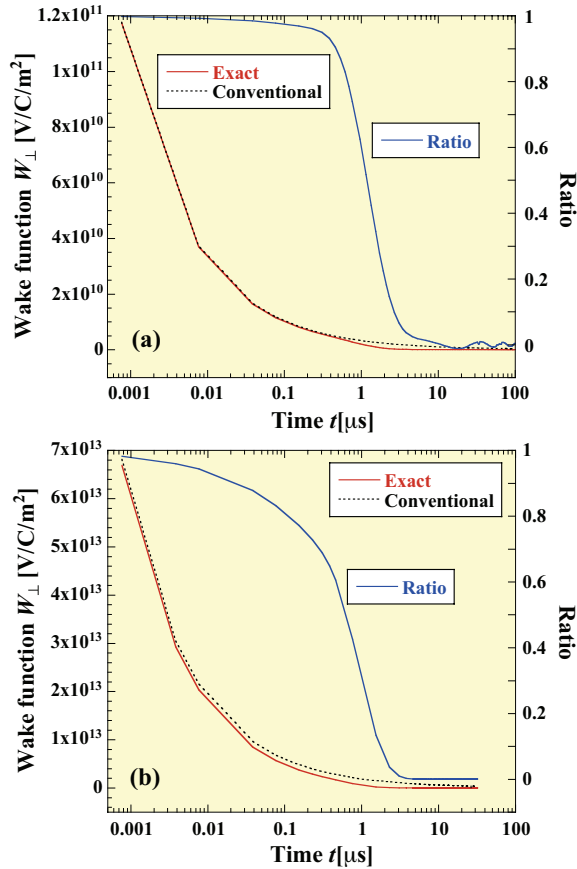


図4：ステンレス製円形パイプのウェーク関数：(a) $b=25\text{mm}$, $d=1\text{mm}$ 、(b) $b=3\text{mm}$, $d=1\text{mm}$ 。黒点線と青実線は古典的表現とその比を示す。

4.2 ウェーク場下での運動方程式

横方向の抵抗壁ウェーク場がある時に、加速器内に入射した M 番目のバンチの運動方程式は次のようになる。

$$y_M''(s) + K(s)y_M(s) = 0 \quad (M=1) \quad (13)$$

$$y_M''(s) + K(s)y_M(s) = \sum_{N=1}^{M-1} h(M-N)y_N(s) \quad (M \geq 2) \quad (14)$$

$$h(M) = \frac{eI\tau_B}{E} W_{\perp}(M\tau_B), \quad I = \frac{eN_B}{\tau_B} \quad (15)$$

ここで、 e , I , E , τ_B は電子の電荷、平均電流、電子のエネルギー、電子バンチ間の時間間隔である。式(14)の右辺は前を走るバンチ群によって蓄積された横方向抵抗壁ウェーク場によるキックを表している。十分に大きい M に対して、

$$y_M(s) \rightarrow y(t,s), \quad t \approx M\tau_B \quad (M \gg 1)$$

となるので、以下では M の代わりに時間 t を使う。

4.3 BBUシミュレーション

式(13)(14)の運動方程式をもとに、コンパクトERL^[3]での抵抗壁ウェーク場によるビームの横方向

の運動に関するシミュレーションを行った。図5にコンパクトERLとシミュレーションの条件を示す。シミュレーションの開始は加速直後で、終了は減速直後とした。その間の長さ L は56.44mで、電磁石の磁場の効果は無視した。電子ビームは、エネルギー60MeV、繰り返し1.3GHz、平均電流100mA（1バンチ当たり77pCの電荷）とし、全てのバンチは開始点で位置の初期オフセット y_0 をもって入射されるものとした。ある時間ある場所でのビームの位置 y は、この y_0 で規格化することができる。半径25mm、厚み1mmのステンレス製円形パイプをコンパクトERLの真空チェンバーと仮定した時のシミュレーション結果を図6(a)に示す。25mmはコンパクトERL真空チェンバーの標準半径として検討されている値である。比較のために、古典的表現を使った場合の結果も示した。抵抗壁ウェーク場によるビームの横方向の変位は、最初は時間とともに増加するが、途中で飽和して初期のオフセットのわずか2%で落ち着くことがわかる。この場合は抵抗壁ウェーク場によるBBUが大きな問題にはならない。古典的表現を使ってしまうと、過去の文献^{[4][5]}でも研究されているように、変位は飽和せずに無限に増加しつづけることになる。次に、パイプ半径3mmと狭くした条件でシミュレーションを行った結果を図6(b)に示す。この場合は、ビーム変位は初期位置の約28倍も増加してから飽和に達するので、初期の位置のオフセットが110 μm 以上あると、ビームがパイプの壁に当たってBBUが起こる。低エネルギービームが長く狭いパイプを通る場合、抵抗壁によるBBUが問題となる可能性が出てくる。

次に、シミュレーションの対象を5GeV-ERLのアンジュレータチェンバー（半径3mm、厚み1mm）とした。エネルギー5GeVの電子ビーム（電流100mA、繰り返し1.3GHz）が最大長100mまでのアンジュレータチェンバーに入射された場合を想定した。ただし、アンジュレータ磁場の影響は無視した。図7にシミュレーション結果である100mチェンバー出口でのビーム変位の時間変化と飽和後のビーム変位のチェンバー長依存性を示す。エネルギーが高いために、100mの長さでもビーム変位は初期の位置オフセットの30%程度増加して飽和してしまうことがわかる。アンジュレータのチェンバー長が短ければ、さらに影響は小さい。ただし、今回はパイプ厚が1mmと通常の場合と比べて少し薄いことやアンジュレータ本体の実効的な厚みも考えると、さらに厚いパイプでのシミュレーションを行って定量的に評価をしておく必要があろう。

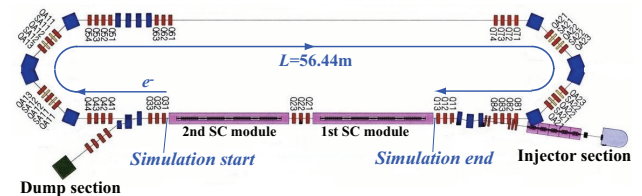


図5：コンパクトERLとシミュレーション条件

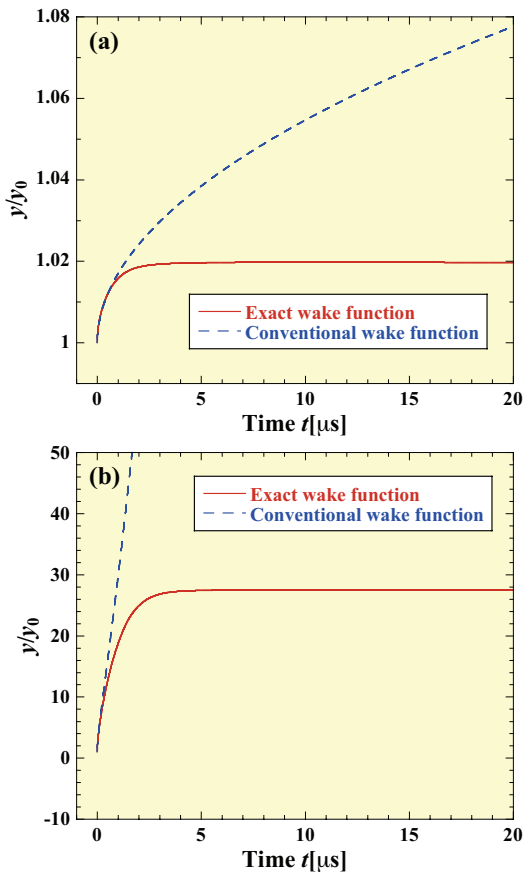


図6：コンパクトERLの抵抗壁ウェーク場のシミュレーション結果：(a) $b=25\text{mm}$, $d=1\text{mm}$, (b) $b=3\text{mm}$, $d=1\text{mm}$ 。青の破線は古典的表現を用いた場合のシミュレーション結果である。

5. 結論

1層及び2層を持つ円形パイプの縦方向抵抗壁インピーダンスの厳密な式を解析的に得ることに成功した。それをもとに計算した典型的なERL放射光源での寄生損失は、バンチが短いために第3世代放射光源よりも大きくなることがわかった。同時に、ステンレスチャンバーの内面に銅メッキを施すことで寄生損失を大幅に減らせることを示すことができた。横方向については、抵抗壁インピーダンスの厳密な式を用いて円形パイプの厳密なウェーク関数を数値計算した。それを用いたシミュレーションの結果、抵抗壁ウェーク場による横方向のビーム変位は増加し続けることなく飽和することがわかった。変位が大きくなる条件（例えば、低いビームエネルギーで長く狭いチャンバーを用いる場合）ではBBUが問題となるが、最終的には変位が飽和するために何らかの方法で制御可能であると期待できる。ビームエネルギーが高いと影響は小さくなるが、取り巻く加速器コンポーネントなどを考慮した実効的なパイプ厚を考えて定量的に評価しておく必要があるだろう。

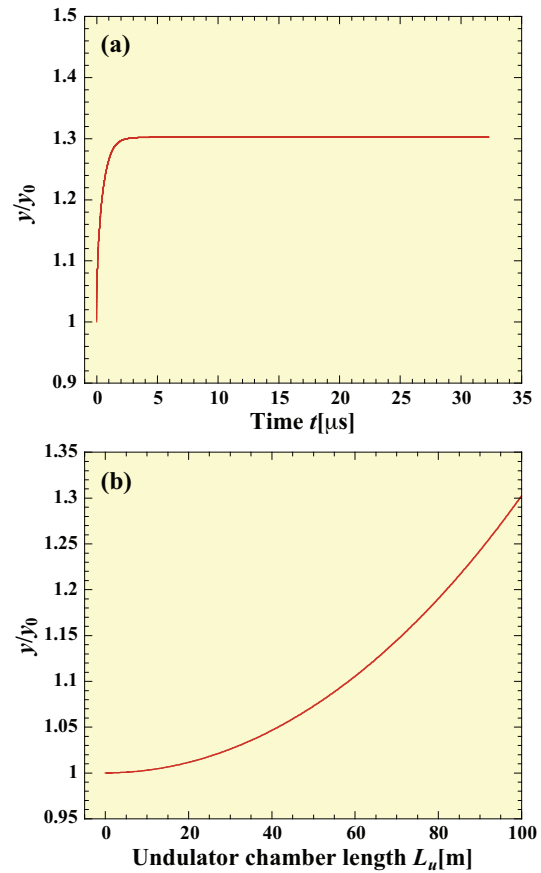


図7：5GeV-ERLのアンジュレータチェンバー（ $b=3\text{mm}$, $d=1\text{mm}$ ）での抵抗壁ウェーク場のシミュレーション結果：(a)長さ100mでのビーム変位の時間依存性、(b)飽和したビーム変位のチェンバー長依存性。

参考文献

- [1] N. Nakamura, “Transverse Resistive-wall Wake of a Round Pipe with Finite Thickness and its Effects on ERL Multi-bunch Beam”, Proceedings of EPAC08, Genoa, June 23-27, pp202-204(2008).
- [2] H. Sakai, et al., “Development of Copper Coated Chamber for Third-generation Light Sources”, Proceedings of the 2005 PAC, Knoxville, May 16-20, pp2633-2635(2005)
- [3] 羽島良一他編集, “コンパクトERLの設計研究”, KEK Report 2007-7/JAEA-Research 2008-032.
- [4] J. M. Wang and J. Wu, “Cumulative beam breakup due to resistive-wall wake”, PRST-AB 7 034402(2004).
- [5] N. Nakamura, “Study of Resistive-Wall Beam Breakup”, Proceedings of ERL07, Daresbury Laboratory, May 21-25, pp45-49(2007).