

# SKIN EFFECT IN RESISTIVE CONDUCTORS BASED ON NEW MULTICONDUCTOR TRANSMISSION-LINE THEORY

Kenji Sato<sup>1,A,B)</sup>, Hiroshi Toki<sup>B)</sup>

A) National Institute of Radiological Sciences, 4-9-1 Anagawa, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8555 Japan

B) Research Center for Nuclear Physics, Osaka University, 10-1 Mihogaoka, Ibaraki-shi, Osaka, 567-0047 Japan

We have constructed new multiconductor transmission-line theory and have succeeded to explain the origin of electromagnetic radiation and noise. Sources of electric and magnetic fields in free space outside the resistive conductors are true electric charge and conduction current inside conductors. Ohm's law and continuity equation play important role through new boundary conditions which differ from ones for perfect conductor. Based on the new multiconductor transmission-line theory, we suppose that sources of electric and magnetic fields inside resistive conductor is power supply which generates non-conservative electric field. Skin effect inside resistive conductor with cylindrical shape is formulated. A new component of current perpendicular to a normal one along transmission line is found.

## 新多導体伝送線路回路理論に基づいて計算した抵抗性導体内部の表皮効果

### 1. はじめに

多導体伝送線路の新しい回路理論の構築に成功し、ノイズと電磁波の起源を解明した<sup>1,2)</sup>。また、「電源と負荷と配線の対称化+コモンモードフィルタとノーマルモードフィルタ」<sup>3,4)</sup>を実現すれば、静的フィルタだけでもノイズは数ppmに抑制出来ることを論じた。最新の情報によれば、CERNのLHCでは電源部門が整備され、それと同時に、対称化を実現し、EMCは数ppmになっているとのことである<sup>5)</sup>。

ノイズと電磁波はいずれも電磁気現象であり、多導体伝送線路の新しい回路理論とは言え、4つのマクスウェル方程式とオームの法則及び連続の方程式=電荷の保存則を完全に順守しており、何らの逸脱もない。しかし、何かがこれまでの電磁気学や回路理論のものの見方や考え方と違っており、その理解を助けるために、多導体伝送線路の新しい回路理論に関するまとめを列挙する。

1. 抵抗性導体の外部の空間の電場と磁場、あるいは、電位 (スカラーポテンシャル) とベクトルポテ

ンシャルの源は導体内部の真電荷と伝導電流である。

2. 伝送線路の回路理論では、導体外部の空間の導体表面の電位と、導体内部を流れる電流との関係を与える。

3. 電気の重ね合わせの原理では、電位を、電位係数と各導体の真電荷の積の和として表す。

4. 磁気の上重ね合わせの原理では、ベクトルポテンシャルを、誘導係数と各導体の伝導電流との積の和として表す。

5. 電位係数も誘導係数もノイマンの公式で計算され、電位係数と誘導係数の比の平方根は光速になる。

6. 伝送線路の1本毎の特性インピーダンスが自己電位係数と自己誘導係数の積の平方根として定まる。

7. 導体を完全導体とする必要はなく、導体の抵抗はノンゼロとして、導体内部でオームの法則が成立するとすれば良い (図1参照)。

8. 導体内部で連続の方程式=電荷の保存則が成立する (図1参照)。

9. 導体内部と導体外部の空間での導体表面での境界条件により、線路の方向の電場が一致する。これにより、導体内部と導体外部の空間の境界での電位とベクトルポテンシャルの関係が定まる。

10. 抵抗性導体の境界条件 (図1参照) の計算式は、従来の完全導体のものとは異なり、導体外部の電場と磁場に寄与する真電荷と伝導電流を全て含む領域を体積積分や面積積分の対象とする。

11. 導体外部の電位とベクトルポテンシャルには、ローレンス条件を満たす遅延ポテンシャルを採用する。

12. 遅延時間に含まれる距離に比例する遅延時間は、伝送線路においては非常に短い時間になることを利用して、テーラー級数展開し、その初項で近似する。これにより、多導体伝送線路を流れる電流の総和であるアンテナモード電流が定義出来る。

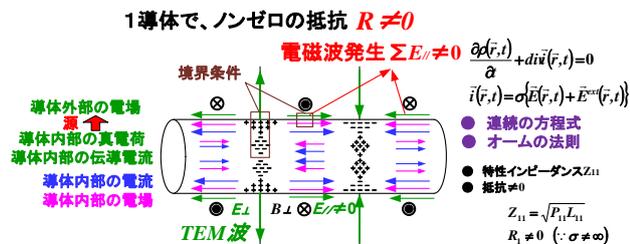


図1: 抵抗性導体の外部の電場と磁場、あるいは、電位とベクトルポテンシャルの源は導体の真電荷と伝導電流。ただし、境界条件は従来の計算方法と異なることに注意。

<sup>1</sup> E-mail: sato@rcnp.osaka-u.ac.jp

13. 抵抗がノンゼロのときアンテナモード電流がノンゼロになり、多導体伝送線路から電磁波が輻射される。

14. 抵抗がノンゼロのときの、導体外部の空間での線路方向の電場が遠方での電磁波の起源であり、線路に垂直な電場は線路間で送信・受信するTEM波の起源である。

15. 3本の導線の伝送線路では、ノーマルモードノイズとコモンモードノイズとアンテナモードの3つのモードが発生する。この3つのモードの結合こそがノイズの起源である。

16. 抵抗がノンゼロでアンテナモード電流がノンゼロのとき電磁波が輻射されるが、その輻射エネルギーは電気回路的に計算される。

17. 「電源と負荷と配線の対称化」を実現すれば、3つのモードの結合をほどこくことが出来る。さらに、対称な配置を持つ「コモンモードフィルターとノーマルモードフィルター」を設けると、3つのモードのノイズを低減出来る。

18. 1本の導線は線状アンテナであるが、電源を繋いだときのアンテナモード電流の線路に沿っての分布が一意的に計算出来る。このとき、抵抗がノンゼロであるので電磁波が輻射され、輻射の全エネルギーは電気回路計算で求めることが出来る。

以上のまとめから、従来の2導体伝送線路の回路理論との違いだけでなく、従来の電磁気学のもの見方の変更を読み取ることが出来る。例えば、前章の3項では電気の重ね合わせの原理には静電係数ではなく電位係数を採用するのが正しいと言うことなので、伝送線路では単位長さ当たりの電気容量は不適切な物理量であり、従って、そこを流れるとして定義されて来た変位電流は存在出来ないことになる。また、変位電流が存在出来ないので、キルヒホフの法則も成立出来ないことになる。そのキルヒホフの法則に代わるのが9項と10項の境界条件である。

こうした新しい考え方にに基づき、特に、抵抗がノンゼロの導体の内部でオームの法則と連続の方程式＝電荷の保存則が成立することに着目し、表皮効果を検討した。ただし、抵抗性導体内部の電場と磁場、あるいは、電位とベクトルポテンシャルが計算出来るためには、その源として、非保存的な電場を発生させる外部起電力である電源が必要とされる(図2参照)。そのとき、損失付きの波動方程式(ヘヴィサイドが提唱した電信方程式で電信技手の方程式とも呼ばれる)が得られ、その解として、抵抗性導体を流れる伝導電流は線路に沿って流れるだけでなく、それに垂直な方向にも流れることが判明した。

本稿では、表皮効果においては、垂直方向に流れる電流が存在するという新しい知見について報告する。しかし、抵抗性導体内部の電場として表皮効果を知らんとすると、今のところ、通常の方法で解を得るのが困難であることが判明した。そこで、その困難な事情について、併せて報告する。

## 2. 導線が1本のときの基本方程式

### 2.1 マクスウェル方程式他と電磁波が出ない近似

前章のまとめの1項、7項、8項、9項、及び、10項について詳しく検討したところ、表皮効果を示す抵抗性導体の内部の電場と磁場、あるいは、電位とベクトルポテンシャルを知るには、その源を非保存的な電場を発生させる外部起電力である電源とすれば良いとの考えに達した(図2参照)。

ただし、導体内部に非保存的な電場が直接現われることはないと考えて良く、電源は、電源と導体を含む閉回路を考えたとき、その閉回路を一周したときの起電力の役割を果たすとすれば良い。

問題は電磁波の輻射の取り扱いである。前章の16項や18項で述べたように、抵抗性導体では電磁波が輻射される。電磁波の輻射により電気的エネルギーが減衰し、その結果、表皮効果も影響を受ける。しかし、電磁波が輻射される現象は多導体伝送線路の新しい回路理論で別途計算出来るものとして、本稿では電磁波は輻射されないという近似を採用する。

従って、抵抗性導体内部では単に4つのマクスウェル方程式、連続の方程式＝電荷の保存則、及び、オームの法則が成立するとすれば良い。このうち、外部起電力があらわな形で式に現われるのは、オームの法則である。

$$\text{電気のガウスの法則} : \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

$$\text{磁気のガウスの法則} : \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2)$$

アンペール・マクスウェルの法則 :

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

ファラデーの電磁誘導の法則 :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

連続の方程式＝電荷の保存則 :

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (5)$$

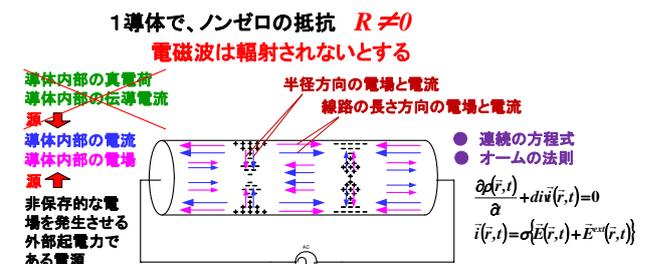


図2: 抵抗性導体の内部の表皮効果を計算するときの電場と磁場、あるいは、電位とベクトルポテンシャルの源は非保存的な電場を発生させる電源。ただし、電磁波の輻射はないものとする。

外部起電力があるときのオームの法則：

$$\mathbf{i}(\mathbf{r},t) = \sigma \{ \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r},t) \} \quad (6)$$

ただし、外部起電力による非保存的な電場は

$$\text{rot} \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r},t) \neq 0 \quad (7)$$

を満たす。また、電気伝導率は導体内部と同じく  $\sigma$  であるとしておく。

## 2.2 電場と磁場の基本方程式

前節で示した諸量のうち、外部起電力を除いては全て導体内部の値である。しかも、導体内部に限れば、オームの法則より、伝導電流と電場とは比例し、

$$\mathbf{i}(\mathbf{r},t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad (8)$$

が成立するので、伝導電流は求めるべき物理量になっており、それ自体が電場と磁場の源とはなれない。また、電気のガウスの法則より、真電荷も

$$\rho(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \quad (9)$$

が成立するので、真電荷も求めるべき物理量になっており、それもまた電場と磁場の源にはなれない。結局、導体内部の電場と磁場の源は、外部起電力と考える必要があり、前節の6つの方程式から、真電荷と伝導電流を消去してやれば良い。こうして、電場と磁場の解くべき偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t} \int_{t_0}^t e^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t'} \Delta \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r},t') dt' \quad (10) \\ & - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t} \int_{t_0}^t e^{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t'} \text{rot} \{ \text{rot} \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r},t') \} dt' \\ & \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\ &= -\sigma \mu_0 \text{rot} \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r},t) \quad (11) \end{aligned}$$

## 2.3 時間変化が単振動の場合

(10)と(11)の物理量の時間変化が単振動で  $e^{j\omega t}$  であるとすると、次の偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - j\omega \sigma \mu_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ &= j\omega \sigma \mu_0 \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r}) \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + j\omega} [\Delta \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r}) + \text{rot} \{ \text{rot} \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r}) \}] \\ & \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - j\omega \sigma \mu_0) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ &= -\sigma \mu_0 \text{rot} \mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r}) \quad (13) \end{aligned}$$

## 2.4 3方向の成分の結合

(10)、(11)、(12)、及び、(13)からは直ちには読み取れないが、右辺の外部起電力の項は複雑な構造であるため、電場や磁場の3方向の成分は結合しているものと考えられる。その点、(21)と(22)を見れば、結合するのがあからさまに読み取ることが出来る。

## 3. 3次元双曲形方程式のグリーン関数

### 3.1 3次元双曲形方程式のグリーン関数<sup>6)</sup>

(10)や(11)の偏微分方程式は3次元双曲形方程式で、

$$\left( \Delta_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial t} - \mu^2 \right) u(\mathbf{r},t) = -v(\mathbf{r},t) \quad (14)$$

はクライン・ゴルドン方程式の一般形と呼べるものである。この式は、1次元の場合にはヘヴィサイドが提唱した電信方程式に相当する。このとき、この(14)の方程式のグリーン関数は

$$\left( \Delta_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial t} - \mu^2 \right) G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') \quad (15)$$

$$= -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

を満たす解  $G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$  であると定義され、遅延条件においては

$$t' > t : G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') = 0 \quad (16)$$

$$t' < t :$$

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$$

$$= \frac{c}{4\pi} e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} U \{ c(t-t') - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \}$$

$$\times \left[ \frac{\delta \{ c(t-t') - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] \quad (17)$$

$$\times \left[ \frac{j q_0 J_1 \left\{ j q_0 \sqrt{c^2(t-t')^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right\}}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}} \right]$$

と与えられることが知られている。ただし、 $U(t)$ はユニット・ステップ関数、 $\delta(t)$ はデルタ関数、 $J_1(\xi)$ は1次のベッセル関数である。このとき、境界条件と初期条件によらない、(14)の右辺を源とする主要解は

$$u(\mathbf{r},t) = \iiint_V v(\mathbf{r}',t') G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t') d\tau dt' \quad (18)$$

と与えられる。なお、(17)は

$$q_0 = \sqrt{\frac{c^2}{4\pi^2} - \mu^2} > 0 \quad (19)$$

が成立するときのグリーン関数であるが、(10)と(11)の形からして、本稿で取り扱っているのは  $\mu = 0$  の場合である。

なお、(17)のグリーン関数は2つの項からなっているが、1次元の場合の電信方程式のグリーン関数は1つの項のみを含むことに注意しておきたい。

### 3.2 解を得るのが困難な事情

(10)と(11)の右辺の外部起電力は複雑な構造であるため、グリーン関数が分かるとしても、直ちに解を得るのは困難である。

## 4. 円柱導体内部の表皮効果

### 4.1 円柱座標

導線は断面が半径  $a$  の円で、長さが  $l$  とする。ここで、他の目的で使用する直角座標と球座標の定義と関連して、円柱座標を定義しておく。

直角座標を  $(x, y, z)$  とし、単位ベクトルを  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  とする。線路の長さ方向を  $x$  軸と定義し、球座標は  $x$  軸に対し定義して  $(r, \theta, \varphi)$  とし、単位ベクトルを  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  とする。円柱座標も  $x$  軸に対して定義して  $(\eta, \varphi, x)$  とし、単位ベクトルを  $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_x)$  とする。

円柱座標において、全ての物理量は円柱回転対称で角度  $\varphi$  には依存しないとし、さらに、電場の  $\varphi$  成分もゼロとする。

$$E_\varphi = 0 \quad (20)$$

これより、電場の半径方向の  $\eta$  成分及び電場の線路の長さ方向の  $x$  成分の偏微分方程式が得られる。

### 4.2 導体内部の方程式

(8)と(9)からして、電場のみを計算すれば知りたい物理量の全てが求まるので、以下では、時間的には単振動であるとし、(12)のみを計算の対象とする。

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \frac{\partial E_\eta(\eta, x)}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial^2 E_\eta(\eta, x)}{\partial x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - j\omega\sigma\mu_0) E_\eta(\eta, x) = j\omega\sigma\mu_0 E_\eta^{ext}(\eta, x) \quad (21)$$

$$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sigma + j\omega} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial E_\eta^{ext}(\eta, x)}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} E_\eta^{ext}(\eta, x) + \frac{\partial E_x^{ext}(\eta, x)}{\partial x} \right\} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \frac{\partial E_x(\eta, x)}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial^2 E_x(\eta, x)}{\partial x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - j\omega\sigma\mu_0) E_x(\eta, x) = j\omega\sigma\mu_0 E_x^{ext}(\eta, x) \quad (22)$$

このとき、右辺は、外部起電力の、半径方向の  $\eta$  成分及び線路の長さ方向の  $x$  成分とが微妙に入り混じっていることや、同じ項を半径で偏微分したり、長さで偏微分したりしていることに注意する必要がある。その結果、抵抗性導体内部の電場は、半径方向の  $\eta$  成分及び線路の長さ方向の  $x$  成分とが結合すると考えられる。

### 4.3 導体内部で右辺の外部起電力がゼロのときの解

導体内部では、外部起電力による非保存的な電場は存在しないとして、右辺をゼロとして見る。

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \frac{\partial E_\eta(\eta, x)}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial^2 E_\eta(\eta, x)}{\partial x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - j\omega\sigma\mu_0) E_\eta(\eta, x) = 0 \quad (23)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \frac{\partial E_x(\eta, x)}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial^2 E_x(\eta, x)}{\partial x^2} + (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - j\omega\sigma\mu_0) E_x(\eta, x) = 0 \quad (24)$$

それぞれの偏微分方程式は独立しており、かつ同形であり、変数分離により、それぞれの解を求めることが出来る。その解を得る過程を省略するが、0次のベッセル関数と波動方程式の解との積となる。

$$E_\eta(\eta, x) = J_0(k_{\eta\eta}\eta) \left( A_{\eta+} e^{k_{\eta\eta}x} + A_{\eta-} e^{-k_{\eta\eta}x} \right) \quad (25)$$

$$E_x(\eta, x) = J_0(k_{x\eta}\eta) \left( A_{x+} e^{k_{x\eta}x} + A_{x-} e^{-k_{x\eta}x} \right) \quad (26)$$

このとき、波数はそれぞれ次の関係を満たす。

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + k_{\eta\eta}^2 - j\omega\sigma\mu_0 = k_{\eta\eta}^2 \quad (27)$$

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 + k_{x\eta}^2 - j\omega\sigma\mu_0 = k_{x\eta}^2 \quad (28)$$

これらの解の問題は、電場の半径方向の  $\eta$  成分  $E_\eta(\eta, x)$  と線路の長さ方向の  $x$  成分  $E_x(\eta, x)$  とがそれぞれ独立していて、第4.2節の(21)と(22)で論じたように、2つの成分が結合しないことである。

### 4.4 電場の半径方向の $\eta$ 成分の境界条件と波数

波数を決めれば良いが、それには、境界条件を適用する。(8)からして、電場の半径方向の  $\eta$  成分は、電流の半径方向の  $\eta$  成分のことであり、この電流は導体表面を垂直に流れることはないから、半径が  $\eta = a$  ではゼロになり、

$$J_0(k_{\eta\eta}a) = 0 \quad (29)$$

が成立しなければならない。従って、 $k_{\eta\eta}a$  は実数で、ベッセル関数  $J_0(\xi)$  のゼロ根でなければならない。

$$k_{\eta\eta i} = \frac{\xi_i}{a} \quad (30)$$

ただし、 $\xi_i (i=1, 2, \dots)$  は  $i$  番目のゼロ根であるので、波数にも  $i$  番目の添え字を付けた。

これと(27)とにより  $k_{\eta\eta i}$  が複素数として定まるので、実数部と虚数部をそれぞれ

$$k_{\eta\eta i} = -jk_{\eta\eta i} - k_{\eta\eta Ri} = -j(k_{\eta\eta i} - jk_{\eta\eta Ri}) \quad (31)$$

と定義する。途中の計算を省略するが、それぞれ

$$k_{\eta\eta i} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{\xi_i}{a} \right)^2 \right] + \sqrt{\left\{ \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{\xi_i}{a} \right)^2 \right\}^2 + (\omega\sigma\mu_0)^2}} \quad (32)$$

$$k_{\eta\eta Ri} = \frac{\omega\sigma\mu_0}{2 \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{\xi_i}{a} \right)^2 \right] + \sqrt{\left\{ \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{\xi_i}{a} \right)^2 \right\}^2 + (\omega\sigma\mu_0)^2}}} \quad (33)$$

と求められる。

(32)の波数は電場の半径方向の $\eta$ 成分が $x$ 方向に伝播するときの波数であるから、その伝播速度は

$$v_{xi} = \frac{\omega}{k_{\eta Ri}} = \frac{2}{\sigma\mu_0} k_{\eta Ri} \quad (34)$$

$$= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{\xi_i}{a} \right)^2 \right] + \sqrt{\left[ \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \left( \frac{\xi_i}{a} \right)^2 \right]^2 + (\omega\sigma\mu_0)^2}}}$$

の式で定まる。この伝搬速度は、光速より相当遅く、伝送線路の間を伝搬する電気信号の伝搬速度を表しているのではないことは明らかである。その一方で、この伝搬速度は導体内部の電場とは無関係に定まるので、いわゆる易動度(mobility)により定まる真電荷の速度とも異なる。

このことから考えて、図2のように両端に電源が繋がった抵抗性導体では、 $x$ の正方向に伝搬する入射波と $x$ の負方向に伝搬する反射波とが、光速よりかなり遅い伝搬速度を持つ波動として伝搬していると考えられる。

なお、 $k_{\eta Ri}$ は $x$ 方向に伝播すると損失して行くことを表わしている。

#### 4.4 参考：従来の解法との比較

従来の表皮効果の計算は、(10)や(11)において、時間による2階微分を無視したものである。円柱座標で言えば、従来の表皮効果の計算は、(23)の電場の半径方向の $\eta$ 成分 $E_\eta(\eta, x)$ を無視し、(24)において、左辺の第3項の $\omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ を無視した式で、さらに、 $x$ 依存性を無視した電場の線路の長さ方向の $x$ 成分 $E_x(\eta)$ の式

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta \frac{\partial E_x(\eta)}{\partial \eta} \right\} - j\omega\sigma\mu_0 E_x(\eta) = 0 \quad (35)$$

の解を求めて来た。そのときの解は、(26)からして、

$$E_x(\eta) = A_x J_0 \left( \eta \sqrt{j\omega\sigma\mu_0} \right) \quad (36)$$

であることが分かる。

#### 4.5 解を得るのが困難な事情

(30)から、0次のベッセル関数の無数のゼロ根が解になることが知られた。しかし、電場の半径方向の $\eta$ 成分から、特定のゼロ根を定めるのは困難である。

この問題を克服しようとする、電場の線路の長さ方向の $x$ 成分との結合を考慮する必要があるものと思われる。しかし、(23)と(24)とは結合がないときの式となっており、解を得るのが困難である。

## 5. 議論

多導体伝送線路の新しい回路理論の構築に成功し、ノイズと電磁波の起源を解明した。その理論は、導体内部の真電荷と伝導電流が、導体外部の空間での

電場と磁場、あるいは、電位(スカラーポテンシャル)とベクトルポテンシャルの源であるとして、導体表面でのその電位と伝導電流の関係を与えるものである。このとき、導体の抵抗はノンゼロであるとして、導体内部でオームの法則と連続の方程式=電荷の保存則が成立するとして解けば良く、従来の回路理論に見られたような完全導体とする必要はない。

この新しい回路理論からすれば、抵抗性導体内部の表皮効果もオームの法則と連続の方程式=電荷の保存則が成立するとして解くべきであることになる。しかし、これらの法則からして、導体内部の電場と磁場の源は真電荷と伝導電流にはなり得ず、そこで、抵抗性導体内部の電場と磁場の源は、非保存的な電場を発生させる外部起電力である電源であるとしなければならない。

そのとき、電磁波は輻射されないと言う条件の下で、解くべき基本方程式として(10)と(11)とが得られることを示した。これらの基本方程式の右辺に現われる外部起電力の形からして、抵抗性導体内部の電場と磁場は3方向で結合することを示しており、2種類の解法を検討したが、いずれの解法でも、その結合した解を得ることは困難であった。なお、解法の1つでは、3次元双曲形方程式である一般化されたクライン・ゴールドン方程式のグリーン関数を利用する。もう1つの解法では、導体内部では外部起電力がゼロとして、解を求める。

いずれの解法も、電場と磁場を求めると言う解法であったため、解を得るのが困難であった可能性もある。そこで、別の解法としては、電位(スカラーポテンシャル)とベクトルポテンシャルと言う電磁ポテンシャルを用いて、表皮効果を知ることが出来るかも知れない。今後は是非挑戦して見る。

## 参考文献

- [1] H. Toki and K. Sato, "Three Conductor Transmission Line Theory and Origin of Electromagnetic Radiation and Noise", J. Phys. Soc. Jpn. 78(2009) 094201
- [2] K. Sato and H. Toki, "Challenge to Antenna-Mode Theory of Multiconductor Transmission-Line", Proceedings of the 6th Particle Accelerator Society Meeting 2009, pp.422-428, JAEA, Tokai, Naka-gun, Ibaraki, Japan, URL: [http://www.pasj.jp/web\\_publish/pasj2009pubfinal/papers/womgao4.pdf](http://www.pasj.jp/web_publish/pasj2009pubfinal/papers/womgao4.pdf)
- [3] K. Sato and H. Toki, "Synchrotron magnet power supply network with normal and common modes including noise filtering", Nucl. Instr. & Meth. in Phy. Res. A565(2006) 351-357
- [4] 佐藤健次、土岐博、『多導体伝送線路回路理論、及び、ノイズと電磁波の起源と低減』、日本物理学会第65回年次大会「ビーム物理領域」、招待講演、2010年3月22日午後前半の部、岡山大学
- [5] 土岐博、2010年7月8日CERNで"New Multiconductor Transmission-line Theory and Reduction of Electromagnetic Noise in Electric Circuit"と題した講演を終えた後のメールによる私信
- [6] 篠崎寿夫・若林敏雄・木村正雄共著、『現代工学のための偏微分方程式とグリーン関数』、現代工学社、1987年初版