

BEHAVIOR OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN CONDUCTING MEDIA: PROPAGATION, RADIATION AND WAKE

Kenji Sato ^{#A)}, Hiroshi Toki ^{B)}

A) HIMAC, National Institute of Radiological Sciences, 4-9-1 Anagawa, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8555

B) Research Center for Nuclear Physics, Osaka University, 10-1 Mihogaoka, Ibaraki-shi, Osaka, 567-0047

Abstract

When resistive conductors are considered to be conducting media, a solution of three-dimensional hyperbolic wave-equation, which is the same as that of longtime theory of Ether, describes behavior of electromagnetic fields in resistive conductors. The equation has two kinds of Green's function; the first one provides propagation and radiation of wave at a speed of light and the second the wake at a lower speed. The wake is considered to be responsible for skin effect in conventional electromagnetism. Although a strict analytic expression of the wake has not been obtained yet, it is quantitatively known from standard electromagnetic theory that the wake produces conducting current in both directions of not only a length but also a radius in contrast to one direction of the length in case of the skin effect.

導電性媒質の内部の電磁場の挙動：伝搬と放射及びその航跡（ウェーク）

1. はじめに

抵抗性導体であれ完全導体であれ、交流においては、導体外部の、しかしながら、導体表面では、電磁波の伝搬と電磁波の放射とが同時に発生し、伝搬と放射とが独立した現象ではないことを、筆者は、マクスウェル方程式から得られる遅延ポテンシャルに基づいて、理論的に明らかにした。その理論^[1]によれば、導体内部では、伝導電流のみならず、真電荷もゼロになることがない。それに加えて、電磁場と同じく、いずれも波動になる。この点で、従来の電磁気学では、直流のときだけでなく交流の場合でも、導体内部では真電荷がゼロになるとされているのとは、一線を画している。

従来の電磁気学では、また、導体内部での真電荷がゼロであることに基づいて、導体内部を線路の長さ方向に流れる電流は、動径に対して、空間的な減衰振動状の分布となる「表皮効果」が発生するとされて来た。交流においては、直流の場合よりも、大きな抵抗が実験的に観測されるが、まるで中空の円筒導体ようになって、電流が流れる断面積が小さくなるという「表皮効果」により、この観測結果が説明出来るとされて来た。

しかしながら、導体内部の真電荷がゼロでない場合には、従来とは異なる方程式を解く必要がある。その方程式は、「オームの法則」と「連続の方程式」をマクスウェル方程式と組み合わせることによって得られるが、それは、その昔、電磁波が伝搬する導電性媒質としてエーテルを想定したときのものと同じで、三次元双曲型波動方程式である。導体内部で成立するこの方程式から、電磁場のみならず、電荷も電流も波動になることが分かるが、三次元の場合の最大の特徴は、一次元や二次元の場合と違って、伝搬と放射によって、その航跡（ウェーク）が発生することであり、この

航跡こそ、従来の「表皮効果」に対応する現象と考えられる。

ところで、伝搬と放射、及び、その航跡に対して2つのグリーン関数が既に知られてはいるが、エーテル理論では無限に広がった導電性媒質を取り扱い対象としたためか、有限の大きさの導電性媒質の内部での解が求められていない。

そこで、一本の円柱導体の中央である原点に、「外部電源」として「点電源」を設けた場合の解を求めることにした。ところが、グリーン関数が与えられているにも拘らず、「点電源」と言う新しい考えに基づいて単純化した場合でさえ、積分公式が見当たらないため、解析的に解を求めることは困難である。しかし、その場合でも、導電性媒質の内部の電磁場の定性的な挙動を知ることが出来、その特徴として2つのことが挙げられる。

1番目は、伝搬と放射は光速で進む波動現象であり、航跡は従来の「表皮効果」と同じ速度で進む波動現象であるということである。従来の「表皮効果」の理論では、光速で進む波動が登場することがなかったのが納得し難いものであったが、本稿の新しい理論では、光速で進む波動が、伝搬と放射の現象として登場し、この点で、マクスウェル方程式を満たしており合理的である。

2番目は、導電性媒質の内部を流れる電流は、単に、線路方向に流れるだけでなく、動径方向にも流れることである。このとき、伝搬と放射の電流、及び、航跡の電流のそれぞれが、線路方向成分と動径方向成分を持つ。その動径方向の電流は、表皮の厚さ方向に流れるので、交流に対する抵抗は直流のときよりも大きくなり、観測結果の説明が可能であると考えられる。

ところで、厳密な解を求めることが困難であるだけに、近似的な解を求める必要がある。そのとき、伝搬と放射の電流の大きさと航跡の電流の大きさととの関係を保つ必要があり、そのような近似的な解を求めることは、今後の課題である。

sato@rcnp.osaka-u.ac.jp

2. 新しい交流回路理論の概要

2.1 土岐博・佐藤健次共著論文の決定版

これまでの日本加速器学会で、何度かに分けて、佐藤健次・土岐博の共著論文として、多導体伝送線路における電気信号の伝搬、多導体伝送線路からの電磁波の放射、及び、抵抗性導体の内部での「表皮効果」に関して、報告して来た。

しかし、これらの学会発表論文では、内容の是非に関して読者を惑わせる個所がなかった訳ではないが、多導体伝送線路での電磁波の伝搬と電磁波の放射が同時に発生する基礎理論に関しては、参考文献^[1]が決定版としてまとまった。この論文では、多導体伝送線路の導体外部の、しかしながら、導体表面でのスカラーポテンシャルの遅延ポテンシャルと、導体内部を流れる電流との関係を与えている。遅延ポテンシャルを用いることが本質的で、新しい交流回路理論と呼べるものである。

2.2 遅延ポテンシャルと電位係数：伝播と放射の共存

上記の論文は数式を多用しており、読み辛いかと思うが、その要点を、円柱導体が1本の場合に対して、簡単に紹介する。線路の長さ方向の位置を x とし、その導体の内部での、真電荷体積密度 $\rho(x,t)$ と伝導電流面積密度 $i(x,t)$ のそれぞれを、その断面で面積分したものを $Q(x,t)$ と $I(x,t)$ とし、また、交流の角周波数を ω とすると、導体外部の、しかしながら、導体表面でのスカラーポテンシャルの遅延ポテンシャルは、

$$\phi(x,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q(x',t) \cos\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}} d^3x' \quad (1)$$

$$+ j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{Q(x',t) \sin\left\{\frac{\omega}{c}\sqrt{(x-x')^2+d^2}\right\}}{\sqrt{(x-x')^2+d^2}} d^3x'$$

と与えられる。ただし、 d は幾何平均距離である。

ここで、右辺の第1項を実数部と呼び、第2項を虚数部と呼べば、虚数部は実数部と位相が90度異なっており、その結果、虚数部を通して電力が損失することになる。従って、実数部は電磁波の伝播を表わし、虚数部は電磁波の放射を表わし、両者が同時に起こることになる。ここで、実数部を、静電容量係数（いわゆるコンデンサー）ではなく、多導体の幾何学的な配置だけで定まる電位係数と $Q(x,t)$ との積で表わす。同様に、ベクトルポテンシャルの実数部を誘導係数と $I(x,t)$ との積で表わす。次に、導体内部で成立する「オームの法則」より、導体内部の、しかしながら、導体表面での電場の接線成分定め、その電場が、境界条件により、導体外部の、しかしながら、導体表面で

の電場の接線成分に等しいとする。さらに、導体内部で成立する「連続の方程式」を適用し、先に得た式を連立させ、変形し整理すると、スカラーポテンシャルの時間偏微分と空間偏微分の連立偏微分方程式得ることが出来る。こうして、導体表面でのスカラーポテンシャルと導体内部を流れる電流との関係を知ることが出来、伝送線路の回路理論が出来上がる。なお、この理論の詳細については、参考文献^[2]として、邦文の解説を書く機会を得たので、それをご覧頂きたい。

この回路理論では、伝播と放射とが同時に発生するので境界条件は伝搬のみのときの従来のものとは異なり、また、コンデンサーも変位電流も登場しないのでキルヒホフの第1法則（電流則）も登場しないことが特徴である。さらに、1本の導体であっても、TEM波と電磁波の放射とが共存することになっている。

ところで、電位係数と誘導係数では重ね合わせの原理が成立するので、この取り扱いは多導体伝送線路に拡張出来る。3導体の場合には、ノーマルモードとコモンモードの伝導ノイズ（電磁場の伝播）に加えて、アンテナモードの放射ノイズ（電磁場の放射）が発生する。そして、「電源と負荷と配線の対称化+コモンモードフィルタとノーマルモードフィルタ」と呼んでいる電気回路の配置が、これらの電磁ノイズを削減出来る、唯一の方法であることが示される。この回路方式は、最初はHIMACにおいて採用され、また、最近では、J-PARCのMRでも採用され始めている。いずれの場合でも、従来の回路方式と比較して、数十倍以上の電磁ノイズの削減に成功している。

3. 導電性媒質の内部の電磁場あるいは電磁ポテンシャルの基本方程式

3.1 「点電源」に対するマクスウェル方程式

通常電磁気学の考えでは、電磁場あるいは電磁ポテンシャルと言う「場」の「源」は、電流と電荷と言う「物質」であるとされている。しかし、導電性媒質の内部では、現象論として知られている「オームの法則」が成立し、電流は電場に比例するので、「場」と「物質」との区別が付かないことになる。そのため、その電流自身は「源」になることが出来ないので、別途、導体に電流と電荷を供給する「源」として、「外部電源」を設ける必要がある。そのときのマクスウェル方程式は、以下の4つである。

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(x,t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x,t) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho^{ext}(x = origin, t) \quad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(x,t) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot}\mathbf{B}(x,t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(x,t)}{\partial t} = \mathbf{i}(x,t) + \mathbf{i}^{ext}(x = origin, t) \quad (4)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(x,t) + \frac{\partial \mathbf{B}(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

ただし、 $\rho^{ext}(\mathbf{x} = origin, t)$ と $\mathbf{i}^{ext}(\mathbf{x} = origin, t)$ は、「外部電源」が原点にて、導電性媒質に供給する真電荷体積密度と伝導電流面積密度であり、「点電源」と呼ぶことにする。 $\rho(\mathbf{x}, t)$ と $\mathbf{i}(\mathbf{x}, t)$ は、導電性媒質の内部の真電荷体積密度と伝導電流面積密度であり、当然、いずれも「連続の方程式」を満たしている。

$$\frac{\partial \rho^{ext}(\mathbf{x} = origin, t)}{\partial t} + div \mathbf{i}^{ext}(\mathbf{x} = origin, t) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + div \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (7)$$

さらに、抵抗性導体の内部では、電気伝導率を σ とすると、「オームの法則」

$$\mathbf{i}(\mathbf{x}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

が成立する。

以上のマクスウェル方程式と「オームの法則」より、導電性媒質の内部の真電荷と伝導電流を消去し、源を右辺に書くと、マクスウェル方程式は

$$div \left\{ \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho^{ext}(\mathbf{x} = origin, t)}{\partial t} \quad (9)$$

$$div \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{\mu_0} rot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} = \mathbf{i}^{ext}(\mathbf{x} = origin, t) \quad (11)$$

$$rot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

と整理出来る。「外部電源」を導入すると、電気 Gauss の法則に対応する(9)では、左辺の発散がノンゼロであることになる。従来の電磁気学では、「外部電源」を明示しなかったこともあり、この発散はゼロとされて来たが、ゼロではない「源」があることが判明した。

これらを変形し整理すると、電場や磁場に対して、三次元双曲型波動方程式が得られる。

$$\left(A_3 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \right\} = \frac{1}{\varepsilon_0} grad \left\{ \frac{\partial \rho^{ext}(\mathbf{x} = origin, t)}{\partial t} \right\} \quad (13)$$

$$\left(A_3 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 rot \mathbf{i}^{ext}(\mathbf{x} = origin, t) \quad (14)$$

この偏微分方程式の解である電場も磁場も波動になるので、(8)や(9)より、導体内部の真電荷も伝

導電流も波動になることは明らかである。

3.2 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

電場と磁場に対する三次元双曲型波動方程式の右辺は複雑で、その物理を理解することは困難であろう。そこで、常套手段であるが、磁気の Gauss の法則(10)とファラデーの法則(12)を用いて、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ を定義する。

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = rot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -grad \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (16)$$

これらの式をマクスウェル方程式に代入すると、以下の連立偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & A_3 \left\{ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \phi(\mathbf{x}, t) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \{ div \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} div \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right] \\ & = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho^{ext}(\mathbf{x} = origin, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \left(A_3 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ & - grad \left\{ \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sigma \mu_0 \phi(\mathbf{x}, t) + div \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right\} \\ & = -\mu_0 \mathbf{i}^{ext}(\mathbf{x} = origin, t) \end{aligned} \quad (18)$$

3.3 「変形ローレンス条件」と三次元双曲型波動方程式

そうは言っても、上に得た連立偏微分方程式のままでは、どう解けば良いのか正体不明である。しかし、ここで、電磁ポテンシャルに対しては、ゲージを選ぶことが出来ることを利用する。そこで、良く知られている「ローレンス条件」に倣って、「変形ローレンス条件」と呼ぶ

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sigma \mu_0 \phi(\mathbf{x}, t) + div \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (19)$$

が成立するとする。これより、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルのそれぞれに

$$\left(A_3 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \phi(\mathbf{x}, t) \right\} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho^{ext}(\mathbf{x} = origin, t)}{\partial t} \quad (20)$$

$$\left(A_3 - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\mu_0 \mathbf{i}^{ext}(\mathbf{x} = origin, t) \quad (21)$$

が得られる。

これらの式の右辺は、期待通り、真電荷の時間微分と伝導電流に比例しており、しかも、左辺は、電場と磁場に対する三次元双曲型偏微分方程式と同じであり、理解しやすいものになっている。

3.4 三次元双曲型波動方程式のグリーン関数は2つ

(20)や(21)よりさらに一般的な、三次元双曲型波動方程式は、下記のように、 $\mu \neq 0$ のときのクライン・ゴルドン方程式を含む形で与えられており、

$$\left(A_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial t} - \mu^2 \right) u(\mathbf{x}, t) = -f(\mathbf{x} = \text{origin}, t) \quad (22)$$

である^[3]。この式の右辺を δ 関数で表わしたときの偏微分方程式

$$\left(A_3 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial}{\partial t} - \mu^2 \right) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (23)$$

の解をグリーン関数と呼ぶ。そのグリーン関数を用いて、解は

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{t_0}^{t_{f0}} \int_V G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') f(\mathbf{x}' = \text{origin}, t') d^3x' dt' \quad (24)$$

と与えられる。ところが、驚いたことに、三次元双曲型波動方程式では、一次元や二次元のとくと違って、グリーン関数は2つの項から成る^[3,4]。それらを、1stと2ndと右足に添え字を付けてやり

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = G_{1st}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + G_{2nd}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \quad (25)$$

と表わせば、それぞれのグリーン関数に対応する解にも、1stと2ndと添え字を付けて、

$$u(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = u_{1st}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') + u_{2nd}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \quad (26)$$

と表わすことが出来、このとき、それぞれの解は

$$u_{1st}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \int_{t_0}^{t_{f0}} \int_V \left[e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\{c(t-t') - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\} \right] d^3x' dt' \quad (27)$$

$$u_{2nd}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \int_{t_0}^{t_{f0}} \int_V \left[e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} \frac{I_1\left\{q_0 \sqrt{c^2(t-t')^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}\right\}}{q_0 \sqrt{c^2(t-t')^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}} \right] d^3x' dt' \quad (28)$$

と与えられる。このとき、これらの式から、それぞれのグリーン関数を読み取ることが出来る。ただし、 $I_1(y)$ は1次の変形ベッセル関数であり、 $\theta(y)$ は単位階段関数であり、また、

$$q_0 = \sqrt{\frac{c^2}{4\kappa^2} - \mu^2} > 0 \quad (29)$$

である。

右足に1stと言う添え字が付いた解には、時間の t' の δ 関数が含まれ、原点で起こった現象が、観測点の位置と時間の (\mathbf{x}, t) に対して、丁度、光速で進んで来た波動を表わしている。右足に2ndと言う添え字が付いた解には、時間の t' の単位階段関数が含まれ、原点で起こった現象が、観測点の位置と時間の (\mathbf{x}, t) に対して、光速で進んで来た波動で、過去の全てを集約したものを表わしている。従って、 $u_{1st}(\mathbf{x}, t)$ は波動の伝播と放射を表わし、 $u_{2nd}(\mathbf{x}, t)$ はそれらの航跡(ウェーク)を表わす^[4]。

グリーン関数が(25)のように2つ現われるのは三次元双曲型波動方程式の特徴であり、一次元や二次元の双曲型波動方程式では、 δ 関数の項は登場せず、単位階段関数の項のみが現われる。

4. 円柱対称で、かつ、特殊な「点電源」のときの電磁ポテンシャルと電磁場

4.1 円柱座標

線路方向の長さを x と表わし、球座標を (r, θ, ϕ) と表わしたいので、円柱座標では、これらの定義を流用すると同時に、動径を η と定義して、 (η, ϕ, x) と表わし、単位ベクトルを $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_x)$ と表わすことにする。

4.2 円柱対称で、特殊な「点電源」

長さが l で、半径が a の1本の円柱導体の内部を取り扱うことにして、その内部での物理量の全ては円柱対称であるとする。「点電源」は当然 $x' = 0$ での原点でしか値を持たないので $\delta(x')$ になるが、本稿では、それ以上に特殊な場合を取り扱うことにする。「外部電源」が導電性媒質に供給する伝導電流を

$$\mathbf{i}^{ext}(\eta', x', t') = i_\eta(t') \delta(\eta') \delta(x') \mathbf{e}_\eta + i_x(\eta', t') \delta(x') \mathbf{e}_x \quad (30)$$

と与える。即ち、円柱対称であるので角度 ϕ' に依存しないと同時に、角度方向の電流成分はゼロであるとする。また、線路方向に供給される電流は動径 η' に依存して変化しているが、さらに、動径方向に供給される電流そのものは $\eta' = 0$ で δ 関数の $\delta(\eta')$ になっているとしている。これに対して、

「外部電源」が導電性媒質に供給する真電荷は、(6)の「連続の方程式」を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{ext}(\eta', x', t')}{\partial t'} &= -\text{div} i^{ext}(\eta', x', t') \\ &= -\frac{1}{\eta} i_{\eta}^{ext}(\eta', x', t') - \frac{\partial i_{\eta}^{ext}(\eta', x', t')}{\partial \eta} - \frac{\partial i_x^{ext}(\eta', x', t')}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{\eta} i_{\eta}(t') \delta(\eta') \delta(x') - i_{\eta}(t') \delta'(\eta') \delta(x') - i_x(\eta', t') \delta'(x') \end{aligned} \quad (31)$$

と与えられる。(30)の発散を計算するため、 δ 関数の微分である $\delta'(x')$ や $\delta'(\eta')$ が登場する。

4.3 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

伝導電流と真電荷が与えられたときの電磁ポテンシャルは(20)と(21)の三次元双曲型波動方程式に従うので、(22)や(29)で $\mu=0$ とする必要があるが、記法上の簡単さのために、当面は κ をそのまま用いることにしよう。

$$q_0 = \frac{c}{\mu_0 2\kappa} \quad \text{where} \quad \frac{1}{\kappa} = \sigma \mu_0 \quad (32)$$

これらの記号を用いて、電磁ポテンシャルの1stと2ndが与えられるが、まずは、見通しの良い、ベクトルポテンシャルを与えておこう。

$$\begin{aligned} A_{1st,\eta}(\eta, x, t) &= A_{2nd,\eta}(\eta, x, t) \\ &= A_{1st,\varphi}(\eta, x, t) = A_{2nd,\varphi}(\eta, x, t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} A_{1st,x}(\eta, x, t) &= \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\varphi' dt' e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} i_x^{ext}(\eta', t') \\ &\quad \times \frac{\delta\left(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2}\right)}{\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2}} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} A_{2nd,x}(\eta, x, t) &= \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{c^2}{4\kappa^2} \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\varphi' dt' e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} i_x^{ext}(\eta', t') \\ &\quad \times \frac{I_1\left[\frac{c}{2\kappa}\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2\}}\right]}{\frac{c}{2\kappa}\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2\}}} \\ &\quad \times \theta\left(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

以上のように、ベクトルポテンシャルは線路の長さ方向の x 成分以外の、動径方向成分や角度方向成分はゼロになることが分かる。

これに対して、スカラーポテンシャルは、(31)のように、真電荷の時間微分には δ 関数の微分が含まれるため、部分積分を実行する必要があり、かなり長くて複雑な式になるので、本稿では、部分積分前の式を示しておく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{1st}(\eta, x, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \phi_{1st}(\eta, x, t) &= -\frac{c}{2\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')}}{\sqrt{\eta^2 + x^2}} i_{\eta}^{ext}\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{\eta^2 + x^2}\right) \\ &\quad - \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\varphi' dt' e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} i_{\eta}^{ext}(t') \delta'(\eta') \\ &\quad \times \frac{\delta\left(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2}\right)}{\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2}} \\ &\quad - \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{x'=0}^{x'=t} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\varphi' dx' dt' e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} i_x^{ext}(x', t') \delta'(x') \\ &\quad \times \frac{\delta\left(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x'^2 - 2xx' + x^2}\right)}{\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x'^2 - 2xx' + x^2}} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{2nd}(\eta, x, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \phi_{2nd}(\eta, x, t) &= -\frac{c}{4\pi\epsilon_0} \frac{c^2}{4\kappa^2} \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} d\varphi' dt' e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} i_{\eta}^{ext}(t') \\ &\quad \times \frac{I_1\left[q_0\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 + x^2\}}\right]}{q_0\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 + x^2\}}} \theta\left(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{\eta'^2 + x^2}\right) \\ &\quad - \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \frac{c^2}{4\kappa^2} \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\varphi' dt' e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} i_{\eta}^{ext}(t') \delta'(\eta') \\ &\quad \times \frac{I_1\left[q_0\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2\}}\right]}{q_0\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2\}}} \\ &\quad \times \theta\left(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x^2}\right) \\ &\quad - \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \frac{c^2}{4\kappa^2} \int_{t'=t_0}^{t'=t} \int_{x'=0}^{x'=t} \int_{\varphi'=0}^{\varphi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\varphi' dx' dt' e^{-\frac{c^2}{2\kappa^2}(t-t')} i_x^{ext}(x', t') \delta'(x') \\ &\quad \times \frac{I_1\left[q_0\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x'^2 - 2xx' + x^2\}}\right]}{q_0\sqrt{c^2(t-t')^2 - \{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x'^2 - 2xx' + x^2\}}} \\ &\quad \times \theta\left(t-t' - \frac{1}{c}\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\varphi-\varphi') + \eta^2 + x'^2 - 2xx' + x^2}\right) \end{aligned} \quad (37)$$

ただし、(36)の伝搬と放射のスカラーポテンシャル $\phi_{1st}(\eta, x, t)$ の右辺の第1項では、 t' 、 η' 、 x' 、及び、 φ' に対しては、 δ 関数の積分を実行することが出来、その結果、動径 η と長さ x との項が現われている。(37)の航跡のスカラーポテンシャル $\phi_{2nd}(\eta, x, t)$ の右辺の第1項では、単位階段関数が含まれるため、こんな芸当は出来ない。

$\phi_{1st}(\eta, x, t)$ と $\phi_{2nd}(\eta, x, t)$ の第2項には $\delta'(\eta')$ が含まれ、第3項には $\delta'(x')$ が含まれ、部分積分が必要であるが、前述したように、その計算を省略した。

なお、これらの式から知られるように、右辺の被積分関数には角度 φ が現われているのに対して、左辺は角度 φ に依存しない形になっている。これは円柱対称の性質からして、右辺の積分を実行すると角度 φ の項が消えるからであるが、積分公式が見当たらないため、残念ながら、解析的な式でそれを示すことが出来ない。本稿では計算を割愛するが、(34)、(35)、(36)、及び、(37)の右辺を角度

ϕ で偏微分してやると、その値がゼロになることが示されるので、それで証明出来ることを紹介しておく。

4.4 電場と磁場

スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが与えられているとき、それらより、電場と磁場が計算出来るが、最初に、磁場を与えておこう。

磁場は、(15)よりベクトルポテンシャルの回転で与えられるが、(33)よりベクトルポテンシャルの線路の長さ方向成分以外はゼロになるので、磁場は角度の ϕ 方向にのみ発生することになる。

$$\begin{aligned} B_{1st,\eta}(\eta, x, t) &= B_{2nd,\eta}(\eta, x, t) \\ &= B_{1st,x}(\eta, x, t) = B_{1st,x}(\eta, x, t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$$B_{1st,\phi}(\eta, x, t) = -\frac{\partial A_{1st,x}(\eta, x, t)}{\partial \eta} \neq 0 \quad (39)$$

$$B_{2nd,\phi}(\eta, x, t) = -\frac{\partial A_{2nd,x}(\eta, x, t)}{\partial \eta} \neq 0 \quad (40)$$

なお、直ぐ下に示す電場の式で、動径方向に電流が流れていることが分かるが、それにも拘わらず、円柱対称な場合には、磁場は、線路の長さ x 方向にも、動径の η 方向にも発生しないことになっている。

電場は(16)で計算されるので、動径方向と線路の長さ方向に発生するが、(33)よりベクトルポテンシャルの線路の長さ方向成分以外はゼロになるので、動径方向の電場はスカラーポテンシャルのみで定まることが分かる。

$$E_{1st,\eta}(\eta, x, t) = -\frac{\partial \phi_{1st}(\eta, x, t)}{\partial \eta} \quad (41)$$

$$E_{2nd,\eta}(\eta, x, t) = -\frac{\partial \phi_{2nd}(\eta, x, t)}{\partial \eta} \quad (42)$$

$$E_{1st,x}(\eta, x, t) = -\frac{\partial \phi_{1st}(\eta, x, t)}{\partial x} - \frac{\partial A_{1st,x}(\eta, x, t)}{\partial t} \quad (43)$$

$$E_{2nd,x}(\eta, x, t) = -\frac{\partial \phi_{2nd}(\eta, x, t)}{\partial x} - \frac{\partial A_{2nd,x}(\eta, x, t)}{\partial t} \quad (44)$$

4.5 交流における伝搬と放射

伝搬と放射の項である $1st$ について検討する。簡単のため、(34)のベクトルポテンシャルの x 成分 $A_{1st,x}(\eta, x, t)$ を取り上げる。先ず、 t' に関する積分を実行する。 δ 関数であるから、遅延形が得られる。

$$\begin{aligned} A_{1st,x}(\eta, x, t) &= \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\phi' e^{-\frac{c^2}{2k^2 c} \sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2}} \\ &\quad i_x^{ext} \left(\eta', t - \frac{1}{c} \sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2}} \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、伝送線路の回路理論の(1)と同じく、角周波数が ω の交流とすると、

$$\begin{aligned} A_{1st,x}(\eta, x, t) &= \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\phi' e^{-\frac{c^2}{2k^2 c} \sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2}} \\ &\quad i_x^{ext}(\eta', t) \cos \left\{ \frac{\omega}{c} \sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2} \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2}} \\ &\quad + j \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{\phi'=0}^{\phi'=2\pi} \int_{\eta'=0}^{\eta'=a} \eta' d\eta' d\phi' e^{-\frac{c^2}{2k^2 c} \sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2}} \\ &\quad i_x^{ext}(\eta', t) \sin \left\{ \frac{\omega}{c} \sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2} \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\eta'^2 - 2\eta\eta' \cos(\phi - \phi') + \eta^2 + x^2}} \end{aligned} \quad (46)$$

となり、実数部と虚数部の和に書ける。この構造は、新しい交流回路理論の章で紹介した通り、(1)の伝搬と放射の共存と同じ構造であり、従って、実数部が伝搬を表し、虚数部が放射を表わすと考えられる。

4.6 線路方向と動径方向の電流の大きさ

線路方向の電場は $1st$ の項と $2nd$ の項から成り、動径方向の電場も $1st$ の項と $2nd$ の項から成り、重ね合わせになっている。このとき、 $1st$ の電場と $2nd$ の電場との大小関係を与える必要があると思われるが、それが今一つはっきりしていない。

例えば、従来の伝送線路の回路理論からすると、電磁場の伝搬は主たる現象であるので、線路の長さ方向に対しては、当然、 $1st$ の電場が $2nd$ の電場より大きいと予想される。

しかし、動径方向に関しては、今のところ、何とも予想し難い。ただ、従来の「表皮効果」の理論が納得出来ない筆者のような者にとっては、動径方向の電場は $2nd$ の電場が $1st$ の電場より大きいと考えたくなる。

そうではないと思う向きには、もう1つの道は、 $2nd$ では、線路方向の電場が動径方向の電場より大きく、その結果、線路方向の電場を知られば良いということになるのかも知れない。この場合には、従来の「表皮効果」に、伝搬と放射の効果を付け加えれば良いことになる。そのときには、交流における電力損失は、従来の「表皮効果」に、伝搬と放射による電力損失が付け加わることになる。

4.7 放射があるときの流体力学的運動方程式

伝搬と放射の1stの項による電流の大きさと、その航跡の2ndの項による電流の大きさととの関係を知る必要があることを論じた。厳密な解が計算出来るときには、自動的に、その関係は定まるのかも知れないが、そうではない可能性もある。そのときは、導体内部では、真電荷も伝導電流も、電場と磁場の下での、荷電粒子の集まりを連続体とする流体力学的運動方程式に従うと考える必要があるかも知れない。

しかし、これは容易ならざる大仕事である。例えば、プラズマ物理学では、導電性媒質を電氣的に中性とする電磁流体近似が多用される。また、マクスウェル方程式のアンペール・マクスウェルの法則に現われるマクスウェル項（従来は変位電流と呼ばれた項）を無視する磁気流体近似もある。しかし、本稿で取り扱った導電性媒質は、どちらの近似も適切ではないようで、話は簡単ではない。

しかも、電磁波が放射されるので、その反作用も考慮しなければならない。また、ローレンツ力のうちの、電流と磁場のベクトル積の力の反作用も含める必要があると思われる。

5. 議論

名は体を表わすと言う観点に立てば、「表皮効果」と言う呼び名に戸惑いを感じておられる人も多いかと思う。交流においては、直流の場合よりも、大きな抵抗が実験的に観測される。従来の「表皮効果」の考えでは、交流に対しては、線路方向に流れる電流の断面積が小さくなり、円柱導体が、まるで、中空の円筒導体になることで、この観測結果が説明出来るとされて来た。

しかし、従来の「表皮効果」の式によれば、導体の抵抗率（電気伝導率の逆数）が小さければ小さいほど、即ち、完全導体に近付けば近付くほど、表皮は薄くなり、従って、線路方向に電流が流れる断面積が小さくなるが、それにも拘わらず、その断面積を流れる電流に対する抵抗は小さくなる。逆に、抵抗率が大きくなればなるほど、表皮が厚くなり、円柱導体全体を一様に流れるようになり、従って、線路方向に電流が流れる断面積が大きくなるが、それにも拘わらず、電流に対する抵抗は大きくなる。どう見ても、線路方向に流れる電流に対する「表皮」と言う呼び名には反する現象になっている気がする。

何とかしたいものだと考えていた矢先、新しい交流回路理論^[1,2]の完成度が高くなり、電磁波の伝搬と電磁波の放射は同時に発生し、そのとき、導体内部の真電荷はゼロではなく、しかも、それは伝導電流と同じく、波動になることが判明した。この新しい知見に基づいて、導体内部での真電荷と伝導電流が満たすべき方程式は、その昔のエー

テル理論に現われるのと同じ、三次元双曲型波動方程式であることを知った。その昔のエーテル理論の文献を探し回ったが、これと言う成果が得られなかったところ、この方程式のグリーン関数は2つの項^[3]から成り、さらに、参考文献^[4]で、「電磁波」の章ではなく、「拡散のグリーン関数」の章で、一方は導体内部を光速で進む伝搬（と放射）を表し、他方はその航跡（ウェーク）であるとの説明に出会った。

こうして、三次元双曲型波動方程式の解を求めれば良いことになったが、それが解析的には解けないことを知った。厳密な解が求まらないものの、幸いにも、導体内部での電場と磁場、及び、真電荷と伝導電流の定性的な振舞いを知ることが出来た。3つの特徴が挙げられる。1番目は、伝搬と放射は光速で進む波動現象であり、航跡は従来の「表皮効果」と同じ速度で進む波動現象であると言うことである。2番目は、伝導電流は線路方向に流れるだけでなく、動径方向にも流れると言うことである。3番目は、動径方向に電流が流れるにも拘わらず、磁場は角度 φ の方向にのみ発生すると言うことである。

2番目により、従来の「表皮効果」とは異なる現象が起こる可能性があることが判明した。動径方向に流れる電流によりジュール熱に伴う電力損失が発生するが、抵抗率が小さいときには、電流が流れる奥行きが浅いので、二重の意味で電力損失が小さく、逆に、抵抗率が大きいときには、電流が流れる奥行きが深いので、二重の意味で電力損失が大きくなると考えられる。これなら、理解し易い。

以上のように定性的に知られる振る舞いから、航跡は従来の「表皮効果」とは別の現象であるとして、本稿では、航跡と言う言葉をそのまま素直に採用することにした。

そうは言っても、現時点では、厳密な解が得られた訳ではない。特に問題なのは、伝搬と放射に関係する電流の大きさと、航跡に関係する電流の大きさととの関係を知る必要があることで、近似的な解を得るとしても、その関係を保つ必要がある。

参考文献

- [1] Hiroshi Toki and Kenji Sato, "Multiconductor Transmission-Line Theory with Electromagnetic Radiation", J. Phys. Soc. Jpn, 81 (2012) 014201
- [2] 土岐博・佐藤健次、『アンテナ過程を含む交流回路理論と電磁ノイズの削減』、日本物理学会誌、解説、受理済みに付き近く掲載される予定
- [3] 篠崎寿夫・若林敏雄・木村正雄共著、『現代工学のための偏微分方程式とグリーン関数』、現代工学社、1998年
- [4] P.M. Morse and H. Feshbach, "METHODS OF THEORETICAL PHYSICS", MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1953